**Nome e matricola:** ..........................................................

**Corso di studi:** ..........................................................

**Prima prova intermedia di Matematica Applicata**
15 novembre 2022

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma $\infty$, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_2$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

*Soluzione.* Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{3}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3\beta & 1/4 & \beta \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \beta & 1/4 & 3\beta \end{bmatrix}, \qquad Q = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T,$$

dove $\alpha$ e $\beta$ sono parametri reali, $I$ è la matrice identità e $\mathbf{w} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T$. Dire per quali valori di $\alpha$ la matrice $A$ è non singolare e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si fissi ora $\alpha = -2$. Determinare lo spettro e il raggio spettrale di $A$ e gli autovalori di $A^2$. Determinare inoltre i valori di $\beta$ che rendono $B$ l'inversa di $A$. Verificare infine che $QQ^T = I$ e calcolare la matrice $M = (AQ)^{-1}$.

*Soluzione.* La matrice $A$ è non singolare per $\alpha \neq \pm 2\sqrt{2}$ e i suoi autovalori sono positivi per $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$. Posto $\alpha = -2$, $\sigma(A) = \{4 - 2\sqrt{2}, 4, 4 + 2\sqrt{2}\}$, $\rho(A) = 4 + 2\sqrt{2}$, $\sigma(A^2) = \{24 - 16\sqrt{2}, 16, 24 + 16\sqrt{2}\}$. La matrice $B$ è l'inversa di $A$ per $\beta = 1/8$, $QQ^T = I$ e

$$M = (AQ)^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -3/8 & -1/4 & -1/8 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 3y = f(x), \qquad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12 a_k}{36 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2k\pi a_k}{36 + k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

dove i coefficienti $a_k$ sono dati da

$$a_k = \frac{4}{(k\pi)^2}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k\right].$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}(k+1)}}{k^2 + 2k + 6}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{x\sin(3x)}{6 + 2x^2}\right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{-\sqrt{5}|x+5| - \mathrm{i}x},$$

$$F(k) = \frac{\pi}{4}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{3}(k-3)}H(-k+3) - \mathrm{e}^{-\sqrt{3}(k-3)}H(k-3) - \mathrm{e}^{\sqrt{3}(k+3)}H(-k-3) + \mathrm{e}^{-\sqrt{3}(k+3)}H(k+3)\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$5y' + 7y = [H(x+3) - H(x-5)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{7}\begin{cases} 0, & x < -3, \\ 1 - e^{-7/5(x+3)}, & -3 \leq x < 5, \\ (\mathrm{e}^{7} - \mathrm{e}^{-21/5})\,\mathrm{e}^{-7/5\,x}, & x \geq 5. \end{cases}$$

**Nome e matricola:** ..........................................................

**Corso di studi:** ..........................................................

**Prima prova intermedia di Matematica Applicata**

15 novembre 2022

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma $\infty$, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_1$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

*Soluzione.* Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_1\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_1\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{v}_1\|_2 = \sqrt{3}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -2 & 0 \\ -2 & \gamma & -2 \\ 0 & -2 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ \delta & 1/2 & \delta \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}, \qquad Q = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T,$$

dove $\gamma$ e $\delta$ sono parametri reali, $I$ è la matrice identità e $\mathbf{w} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)^T$. Dire per quali valori di $\gamma$ la matrice $A$ è non singolare e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si fissi ora $\gamma = 4$. Determinare lo spettro e il raggio spettrale di $A$ e gli autovalori di $A^2$. Determinare inoltre i valori di $\delta$ che rendono $B$ l'inversa di $A$. Verificare infine che $QQ^T = I$ e calcolare la matrice $M = (AQ)^{-1}$.

*Soluzione.* La matrice $A$ è non singolare per $\gamma \neq 0, \pm 2\sqrt{2}$ e i suoi autovalori sono positivi per $\gamma > 2\sqrt{2}$. Posto $\gamma = 4$, $\sigma(A) = \{4 - 2\sqrt{2}, 4, 4 + 2\sqrt{2}\}$, $\rho(A) = 4 + 2\sqrt{2}$, $\sigma(A^2) = \{24 - 16\sqrt{2}, 16, 24 + 16\sqrt{2}\}$. La matrice $B$ è l'inversa di $A$ per $\delta = 1/4$, $QQ^T = I$ e

$$M = (AQ)^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} -1/8 & -1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -3/8 & -1/4 & -1/8 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 3y = f(x), \qquad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & -2 \leq x < -1, \\ -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi b_k}{36 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{12 b_k}{36 + k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

dove

$$b_k = \frac{2}{k\pi} + \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}(k-2)}}{k^2 - 4k + 6}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{x\cos(5x)}{6 + 3x^2}\right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|x+3| + 2\mathrm{i}x},$$

$$F(k) = \frac{\pi\mathrm{i}}{6}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{2}(k+5)}H(-k-5) - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(k+5)}H(k+5) - \mathrm{e}^{\sqrt{2}(k-5)}H(5-k) - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(k-5)}H(k-5)\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$7y' - 3y = [H(x+2) - H(x-2)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{3}\begin{cases} (\mathrm{e}^{-6/7} - \mathrm{e}^{6/7})\,\mathrm{e}^{3/7\,x}, & x < -2, \\ e^{3/7(x-2)} - 1, & -2 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$