

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

26 luglio 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_4 & = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 1 \end{cases}$$

Lo si risolva mediante la fattorizzazione  $PA = LU$  e si calcoli il suo determinante e la quarta colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -3/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -2, \quad A\mathbf{e}_4 = (-3, 3, -1, -3)^T, \quad \mathbf{x} = (0, 1, 2, 1)^T.$$

2. Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dove

$$A = \begin{bmatrix} 4\beta & 2\beta & \beta \\ 2\beta & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori di  $\beta \geq 0$  la matrice  $A$  è invertibile. Si studi al variare di  $\beta$  la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto  $\beta = 1$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$ .

*Soluzione.* La matrice dei coefficienti è non singolare se  $\beta \neq 0, 4/5$ . Il metodo di Gauss-Seidel converge per  $-4/5 < \beta < 4/5$ . Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/2, 1, 3/2)^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = (-5/8, 5/4, 13/8)^T$ .

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y' - y}{2x}, & x \in [1, 5], \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{2}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = 2$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{9}{8}, \frac{11}{8})^T$ .

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < -1, \\ -2x & -1 \leq x < 1, \\ -2 & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La funzione  $f$  non è differenziabile termine a termine e la serie di Fourier è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \left[ (-1)^k - \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{3ix}}{x^2 + 2x + 2} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{ik e^{3ik}}{k^2 + 4} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \pi e^{i(k-3)-|k-3|},$$
$$f(x) = -\frac{1}{2} \left[ e^{-2(x+3)} H(x+3) - e^{2(x+3)} H(-x-3) \right].$$