Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

30 marzo 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ -2x_1 + 3x_4 & = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 5 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione PA=LU e si calcoli il suo determinante e la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -10, \quad A\mathbf{e}_2 = (-1/5, 2/5, 0, 1/5)^T, \quad \mathbf{x} = (1, -1, 0, 2)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -3\alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori di α la matrice A è invertibile. Si studi al variare di α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha > \sqrt{6}/3$ oppure $\alpha < -\sqrt{6}/3$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (0, -1/3, 0)^T$.

3. Si studi la stabilità, la consistenza e l'ordine del seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{3}{4}h, \eta_k + \frac{3}{4}hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$$

   e lo si applichi con passo $h = \frac{1}{2}$ al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + y, & x \in [1, \infty), \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

per calcolare la soluzione nel punto $x = 2$.

Soluzione. Il metodo essendo monostep è stabile, è consistente del second'ordine, e quindi convergente, e fornisce le approssimazioni $\eta_1 = \frac{3}{4}$, $\eta_2 = \frac{73}{32}$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x), & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(x), & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

e dire se tale serie è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie f è differenziabile termine a termine e la serie é

$$S_f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{k^2-1}\right) - \frac{(-1)^k}{k^2-1}\right]\cos(kx).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{x^2 - 4x + 7}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k-2)}{25 + (k-2)^2}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} e^{-2\mathrm{i}(k+3) - \sqrt{3}|k+3|}, \qquad f(x) = -\frac{e^{2\mathrm{i}x}}{2}[e^{-5x}H(x) - e^{5x}H(-x)].$$