Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
13 gennaio 2022

1. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$$
Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 6/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 14/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = [1, 0, -1, 2]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0$. Il metodo di Jacobi converge per ogni valore di $\gamma \neq 0$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 0, 0]^T$. Essendo il metodo consistente, lo stesso vettore è la soluzione del sistema.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = xyy' - 1, \quad x \in [2, 5] \\ y(2) = 0, y'(2) = 1 \end{cases}$$
e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 5/2$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{16}, \frac{155}{256})^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione e dire se tale serie è differenziabile termine a termine

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

Soluzione. La funzione non è differenziabile in quanto non è continua in $x = \pm 1$. La serie richiesta è

$$S_f(x) = \frac{7}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{8}{(k\pi)^2} + 1\right) + \frac{8}{(k\pi)^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{ix}{6+4x^2}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+i(5k-2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = -\frac{\pi}{4}\left[e^{\sqrt{\frac{3}{2}}k} H(-k) - e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}k} H(k)\right].$$

$$f(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{2x}{5}(\mathrm{i}-1)} H(x)$$