Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata
31 gennaio 2022

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 & b & -1/4 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/4 & -b & 3/4 \end{bmatrix},$$

dove a e b sono parametri reali. Si calcoli, al variare del parametro a la norma 1 e ∞ della matrice A. Si fissi poi $a = 1$ e si determini il parametro b tale che B è inversa di A. Si calcoli quindi l'indice di condizionamento di A in norma 1, 2 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $A^2x = b$ dove $b = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. Essendo A simmetrica,

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = \begin{cases} 2|a| + 1, & a \geq 3/2 \text{ oppure } a \leq -3/2, \\ 4, & -3/2 < a < 3/2. \end{cases}$$

Posto $a = 1$, la matrice B è l'inversa di A per $b = -1/2$, e $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 4 \cdot 2 = 8$, $\kappa_2(A) = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = B(B\mathbf{b}) = \left(-\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\right)^T.$$

2. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli, mediante la fattorizzazione PA=LU, il suo determinante, la prima colonna della sua inversa e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -2, \quad A\mathbf{e}_1 = (0, 1, -1)^T, \quad \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\right)^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2\gamma & 1 & 0 \\ 1 & -4\gamma & -1 \\ 0 & -1 & 2\gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm \mathrm{i}/2$. Il metodo di Jacobi converge per $\gamma > 1/2$ oppure $\gamma < -1/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0,0)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (1/2, 1/8, 1/16)^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y' + y}{x + 1}, \quad x \in [2,5], \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{4}, \frac{13}{6})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{7}{3}, \frac{145}{48})^T$.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha h}{2\beta} \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + h, \eta_k + h f(x_k, \eta_k)\right) \right].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = \left(\gamma - \frac{3}{2}\right) \eta_k + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\eta_{k-1} + h \left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

Soluzione. Il primo metodo, essendo monostep, è stabile per $\beta \neq 0$. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = \beta \neq 0$ e per questi valori è del secondo ordine. Il metodo multistep è stabile per $0 \leq \gamma \leq 2$.