**Nome e matricola:** ..........................................................................

**Corso di studi:** ..............................................................................

**Prova scritta di Matematica Applicata**

23 settembre 2021

1. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il suo determinante, la seconda colonna della sua inversa e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, -5, -6, 12]^T$.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = (2, -2, 1, -1)^T, \qquad \det(A) = -256, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (0, -1/4, 0, 1/4)^T.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro $\alpha$ la matrice $A$ è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1,\, 0,\, 1]^T$. Si studi al variare del parametro $\alpha$ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

*Soluzione.* La matrice $A$ è invertibile per $\alpha \neq 0$. Gli autovalori sono positivi per $\alpha > 0$. Il metodo di Jacobi converge per ogni valore di $\alpha$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/4, 0, 1/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [3/16, 0, 5/32]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x} + xy, \qquad x \in [1, 4], \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

*Soluzione.* $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{4}, \frac{19}{8})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = \delta(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{3(x-1)}, & x \leq 1, \\ -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-(x-1)}, & x > 1. \end{cases}$$