

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

11 gennaio 2021

*L'esame è stato svolto in modalità telematica.*

*Gli esercizi assegnati agli studenti sono stati estratti dai seguenti testi.*

1. Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinare il valore di  $\alpha$  che rende  $Q$  non singolare, quello che la rende ortogonale, e il valore di  $\beta$  che rende  $M$  l'inversa di  $L$ . Fissati  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{3}$ , e  $A = QL$ , si risolva nel modo più efficiente il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{b} = (1, 2, 0)^T$ .

*Soluzione.*  $Q$  è non singolare per  $\alpha \neq 0$  e ortogonale per  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $M = L^{-1}$  per  $\beta = -\frac{1}{3}$ .  $\mathbf{x} = MQ^T\mathbf{b} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ .

2. Si consideri la seguente matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & \beta & -\beta \end{bmatrix}.$$

Si determini al variare del parametro  $\beta$  lo spettro e il raggio spettrale. Si calcolino i valori di  $\beta$  che rendono  $Q$  ortogonale. Fissato uno di tali valori, si determini l'indice di condizionamento di  $Q$  con indice  $\infty$ , 1 e 2.

*Soluzione.*  $\sigma(Q) = \{1, \sqrt{2}|\beta|\}$ ,  $\rho(Q) = 1$  se  $|\beta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\rho(Q) = \sqrt{2}|\beta|$  altrimenti.  $Q$  è ortogonale per  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $\text{cond}(Q)_2 = 1$ ,  $\text{cond}(Q)_1 = \text{cond}(Q)_\infty = 2$ .

3. Calcolare la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice  $A$ , la prima e seconda colonna dell'inversa di  $A$  e la soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = (1, 0, 2)^T$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9/10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = (-17/9, -2/9, 10/9)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (13/9, 1/9, -5/9)^T \quad \mathbf{x} = (-19/9, 2/9, 8/9)^T.$$

4. Calcolare la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice  $A$ , la prima e seconda colonna dell'inversa di  $A$  e la soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = (1, 0, 2)^T$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/17 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 17/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/17 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = (-1/9, 2/9, -1/9)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-5/9, 1/9, 13/9)^T \quad \mathbf{x} = (19/9, -2/9, -35/9)^T.$$

5. Sia  $\alpha$  un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di  $\alpha$  il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = (1, 0, 1)^T$ . Fissato  $\alpha = 1/2$ , si calcolino le prime due iterate di entrambi i metodi considerando come punto iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ .

*Soluzione.* Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di  $\alpha \neq 0$ . Se  $\alpha = 1/2$  le iterazioni del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 0, -1/6)^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = (7/3, 0, 0)^T$ ; le iterazioni di Gauss-Seidel sono  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = (2, 0, 0)^T$ .

6. Sia  $\beta$  un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ \beta & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di  $\beta$  il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ . Fissato  $\beta = 1/2$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi e fissato  $\beta = 1$  si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando come punto iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ .

*Soluzione.* Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di  $\beta$ . Se  $\beta = 1/2$  le iterazioni del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = (2, -1/3, -1/5)^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = (12/5, -1/3, -2/15)^T$ ; le iterazioni di Gauss-Seidel sono  $\mathbf{x}^{(1)} = (1, -1/3, -2/15)^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = (17/15, -1/3, -8/75)^T$ .

7. Si consideri il sistema  $Ax = b$  dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si stabilisca per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto  $\alpha = 1$ , si calcolino le prime due iterate di tale metodo a partire da  $x^{(0)} = [1, 0, 1]^T$ .

8. Dopo aver classificato il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{6} [2f(x_k, \eta_k) + \alpha f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))],$$

si determinino i valori dei parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  che lo rendono convergente del secondo ordine. Assegnati tali valori di  $\alpha$  e  $\beta$ , applicarlo infine al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy, & x \in [1, 5], \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

con passo  $h = \frac{1}{2}$ , per approssimare la soluzione nel punto di ascissa  $x = \frac{3}{2}$ .

*Soluzione.* La formula è monostep, esplicita. È consistente per  $\alpha = 4$  e  $\forall \beta$ . Essendo stabile è convergente per gli stessi valori dei parametri. È del secondo ordine per  $\alpha = 4$  e  $\beta = \frac{3}{4}$ .  $y(\frac{3}{2}) \simeq \eta_1 = \frac{115}{32}$ .

9. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{y} - x, & x \in [0, 4] \\ y(0) = 1, y'(0) = 2, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{2}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = \frac{3}{2}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, 3)^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{21}{4}, \frac{7}{2})^T$ .

10. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y - x, & x \in [0, 4] \\ y(1/2) = 1, y'(1/2) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{2}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = \frac{3}{2}$ .

11. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-1, 1]$  e dire se la serie di Fourier di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine

$$y'' - 2y' + 5y = f(x), \quad f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x.$$

*Soluzione* La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{(4k^2 - 1)\pi} \cos k\pi x.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{2}{5\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{(25 - 6k^2\pi^2 + k^4\pi^4)(4k^2 - 1)\pi} [(5 - k^2\pi^2) \cos k\pi x - 2k\pi \sin k\pi x].$$

12. Eseguire i seguenti calcoli, dove  $*$  indica l'operatore di convoluzione e  $H$  indica la funzione di Heaviside

1.  $e^{-3|x|} * [H(x+1) - H(x-2)]$
2.  $[e^{-(x-2)}H(x-2)] * [e^{-5x}H(x)]$
3.  $\mathcal{F} \left\{ (e^{-2x}H(x-3) \sin 4x) * \left( \frac{e^{-2ix}}{x^2+1} \right) \right\}$
4.  $\mathcal{F} \left\{ (e^{-5x}H(x-2) \sin 3x) * \left( \frac{e^{-5ix}}{x^2+1} \right) \right\}$
5.  $\mathcal{F} \left\{ \delta(x - \frac{1}{5}) \cos x \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-ik}}{(k-\pi)} \sin(3(k-\pi)) \right\}$
6.  $\mathcal{F} \left\{ \delta(x - \frac{1}{3}) \sin x \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-ik}}{(k-2)} \sin(3(k-2)) \right\}$
7.  $\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-7ix}}{x^2+6x+10} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i(k-3)}{25+(k-3)^2} \right\}$

*Soluzione.*

1.

$$e^{-3|x|} * [H(x+1) - H(x-2)] = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{3x}(e^3 - e^{-6}), & x < -1 \\ \frac{1}{3}[(1 - e^{-3(x+1)}) + (1 - e^{3(x-2)})], & x \in [-1, 2) \\ \frac{1}{3}e^{-3x}(e^6 - e^{-3}), & x \geq 2 \end{cases}$$

2.

$$[e^{-(x-2)}H(x-2)] * [e^{-5x}H(x)] = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}e^{-5x+2}(e^{4x} - e^8), & x > 2 \end{cases}$$

3.

$$F(k) = \frac{\pi}{2i} e^{-|k+2|-6} \left( \frac{e^{-3i(k-4)}}{2+i(k-4)} - \frac{e^{-3i(k+4)}}{2+i(k+4)} \right)$$

4.

$$F(k) = \frac{\pi}{2i} e^{-|k-5|-10} \left( \frac{e^{-2i(k-3)}}{2+i(k-3)} - \frac{e^{-2i(k+3)}}{2+i(k+3)} \right)$$

5.

$$F(k) = \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{(k-1)i}{5}} + e^{-\frac{(k+1)i}{5}} \right], \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{\pi i(x-1)} [H(x+2) - H(x-4)]$$

6.

$$F(k) = \frac{1}{2i} \left[ e^{-\frac{(k-1)i}{3}} - e^{-\frac{(k+1)i}{3}} \right], \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{2i(x-1)} [H(x+2) - H(x-4)]$$

13. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 9y = H(x+1) - H(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} e^{3x} (e^3 - e^{-6}), & x < -1 \\ \frac{1}{18} [(1 - e^{-3(x+1)}) + (1 - e^{3(x-2)})], & x \in [-1, 2) \\ \frac{1}{18} e^{-3x} (e^6 - e^{-3}), & x \geq 2 \end{cases}$$

14. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = \delta(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = -\frac{1}{4} [e^{5(x-2)} H(2-x) - e^{x-2} H(2-x)]$$