

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prova scritta di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

Compito numero uno

1. Si considerino le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta & -\beta \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e si determinino i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per cui  $Q$  è una matrice ortogonale e per cui le matrici  $R$  e  $M$  sono una l'inversa dell'altra. Assegnati ad  $\alpha$  e  $\beta$  uno di questi valori, si calcolino  $\kappa_2(Q)$  e  $\kappa_\infty(R)$ , essendo  $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ . Si risolva infine il sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $A = QR$  e  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ .

*Soluzione* La matrice  $Q$  è ortogonale per  $\alpha = \pm\sqrt{2}/2$ ,  $M$  è l'inversa di  $R$  per  $\beta = -1$ ,  $\kappa_2(Q) = 1$ ,  $\kappa_\infty(R) = 24$ ,  $\mathbf{x} = M(Q^T\mathbf{b}) = (\sqrt{2} + 1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ .

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [1, 0, 2]^T$ . Si studi al variare del parametro  $\alpha$  la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato  $\alpha = 2$ , si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è invertibile per  $\alpha \neq 0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$ . Gli autovalori sono positivi per  $\alpha > \sqrt{2}/2$ . Il metodo di Gauss-Seidel converge se  $\alpha > \sqrt{2}/2$  oppure  $\alpha < -\sqrt{2}/2$ . Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 0, 5/8]^T$ .

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'y - 1}{x + 2}, & x \in [1, 4] \\ y(1) = 0, y'(1) = 1/2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{4}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = \frac{3}{2}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/8, 5/12)^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (11/48, 11/32)^T$ .

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + \sqrt{2}y' + y = f(x), \quad \text{dove } f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k}{k(1+16k^4)} \cos(2kx) + \frac{4k^2-1}{k(1+16k^4)} \sin(2kx).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 5y' + 6y = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{7} \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^{6x}, & x < 0. \end{cases}$$

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova Scritta di Matematica Applicata**

28 gennaio 2020

Compito numero due

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e si dica se il vettore  $\mathbf{v}_3$  è normalizzato rispetto alle norme con indice 1, 2 e  $\infty$ .

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_3$  è normalizzato rispetto alla norma  $\infty$ . I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

2. Calcolare la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di  $A$  e la terza colonna dell'inversa di  $A$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 6, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-3/2, 1, 1/2, -1/2]^T.$$

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4} \left[ 3f(x_k, \eta_k) + 2\beta f\left(x_k + \frac{5\beta}{4\alpha}h, \eta_k + \frac{5\beta}{4\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right) \right]$$

e se ne studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Si classifichi, inoltre, il seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$$

e se ne studi la stabilità al variare del parametro reale  $\delta$ .

*Soluzione.* Il primo schema è di tipo monostep esplicito a due stadi e in quanto tale è stabile. È consistente e quindi convergente per  $\alpha \neq 0$  e  $\beta = 1/2$ , del secondo ordine per  $\alpha = 5/16$  e  $\beta = 1/2$ . Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per  $-3 \leq \delta \leq 1$ .

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazioni differenziale

$$\sqrt{2}y'' + y = f(x), \quad \text{dove } f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

e dire se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine. *Soluzione.* La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4\sqrt{2}k^2 - 1)} \sin(2kx).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{x}{x^2 + 5} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin 3(k-1)}{e^{ik}(k-1)} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \pi i \left[ e^{\sqrt{5}k} H(-k) - e^{-\sqrt{5}k} H(k) \right],$$
$$f(x) = \frac{1}{2} [H(x+2) - H(x-4)] e^{i(x-1)}.$$