Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

28 gennaio 2020

1. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 5y' + 6y = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{7}\begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^{6x}, & x < 0. \end{cases}$$

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la terza colonna dell'inversa di A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 6, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-3/2, 1, 1/2, -1/2]^T.$$

3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1,\ 0,\ 2]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per $\alpha \neq 0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$. Gli autovalori sono positivi per $\alpha > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > \sqrt{2}/2$ oppure $\alpha < -\sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 0, 5/8]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'y-1}{x+2}, \quad x \in [1,4] \\ y(1) = 0, y'(1) = 1/2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/8, 5/12)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (11/48, 11/32)^T$.

5. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4}\left[3f(x_k,\eta_k) + 2\beta f\left(x_k + \frac{5\beta}{4\alpha}h, \eta_k + \frac{5\beta}{4\alpha}hf(x_k,\eta_k)\right)\right]$$

e se ne studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Si classifichi, inoltre, il seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta+1)\eta_{k-1} + 2hf(x_k,\eta_k)$$

e se ne studi la stabilità al variare del parametro reale δ.

Soluzione. Il primo schema è di tipo monostep esplicito a due stadi e in quanto tale è stabile per $\alpha \neq 0$. È consistente e quindi convergente per $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1/2$, del secondo ordine per $\alpha = 5/16$ e $\beta = 1/2$. Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per $-3 \leq \delta \leq 1$.