Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
11 luglio 2019

1. Sia A la matrice dei coefficienti del seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} .$$

   Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare dato e calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice A.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x = (4, 5, 3, 7)^T, \qquad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-2, -3, -1, -4)^T.$$

2. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

   Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si studi, inoltre, al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel per approssimare la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1, 2, 3]^T$ e, fissato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo considerando come punto iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

   Soluzione. La matrice A è invertibile se $\alpha \neq 0, \pm 1$, è definita positiva se $\alpha > 1$ e il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 1$. Se $\alpha = 2$ le iterazioni richieste sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2,\ 1\,, 3/4]^T$,$\mathbf{x}^{(2)} = [-7/8,\ 1\,, 15/16]^T$.

3. Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{7}\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \alpha\beta h, \eta_i + \alpha\beta h f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e discuterne la convergenza al variare dei parametri reali α e β.

Soluzione. Si tratta di una formula monostep esplicita a 2 stadi. Il metodo è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 6$; è del second'ordine per $\alpha = 6$ e $\beta = 7/12$.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}{2 + \mathrm{i}(k-1)}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(2x)}{1 + \mathrm{i}(x-1)}\right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(x+3)(\mathrm{i}-2)} H(x+3) \\ F(k) &= \pi\left[e^{(k+2)(1-\mathrm{i})} H(-k-2) + e^{(k-2)(1-\mathrm{i})} H(-k+2)\right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$\sqrt{5}y' - 3y = H(x+5) - H(x-7),$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\sqrt{5}}{5}(x-7)} - \mathrm{e}^{\frac{3\sqrt{5}}{5}(x+5)}\right), & x < -5 \\ \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\sqrt{5}}{5}(x-7)} - 1\right), & -5 < x \leq 7, \\ 0, & x \geq 7. \end{cases}$$