Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
25 giugno 2019

1. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -1, \quad \text{la soluzione è} \quad \mathbf{x} = (4,5,3,7)^T.$$

2. Sia α un parametro reale e si considerino le seguenti matrici

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad A = B + B^T.$$

Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali essa risulta definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [0,1,2]^T$ e, fissato $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate di tale metodo, considerando come vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0,1,0]^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per $\alpha \neq 0$ e definita positiva per $\alpha > 0$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per ogni $\alpha \neq 0$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/4, 5/8, 1)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (-5/32, 37/64, 1)^T$.

3. Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h\left[\alpha f(x_i,\eta_i) + 2f(x_i + \beta h, \eta_i + \beta h f(x_i,\eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e discuterne la convergenza al variare dei parametri reali α e β.

Soluzione. Si tratta di una formula monostep esplicita a 2 stadi. Il metodo è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = -1$; è del second'ordine per $\alpha = -1$ e $\beta = 1/4$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & -2 \leq x < -1, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

e dire se la serie ottenuta è differenziabile termine a termine, giustificando la risposta.

Soluzione.

$$S_f(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right)}{k-1} + \frac{\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{k+1}\right]\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

La serie è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$\sqrt{3}y' + 5y = H(x-3) - H(x-5),$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5\sqrt{3}}{3}x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{5\sqrt{3}}{3}x} - \mathrm{e}^{-5\sqrt{3}}\right), & 3 < x \leq 5, \\ \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5\sqrt{3}}{3}x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{25\sqrt{3}}{3}} - \mathrm{e}^{-5\sqrt{3}}\right), & x > 5. \end{cases}$$