Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

6 giugno 2019

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha^2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro reale. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A e si calcoli mediante essa il determinante di A. Si determinino i valori di α che rende Q una matrice ortogonale e per uno di essi si determini, nel modo più conveniente possibile, la soluzione del sistema $Qx = b$ con $b = (1, -1, 0)^T$.

Soluzione

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 4/23 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 23/4 & 13/2 \\ 0 & 0 & -49/23 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 49$, $\quad \alpha = \pm\sqrt{3}$, $\quad$ Se $\alpha = \sqrt{3}$ la soluzione è $\quad \mathbf{x} = \left(0, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^T$.

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3\alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 3\alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 1$, si eseguano le prime due iterazioni del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$ con $b = (2, 1, 2)^T$, considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{6}/3\}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > \sqrt{6}/3$ oppure se $\alpha < -\sqrt{6}/3$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1/3, -1, 1/3)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 1/3, 1)^T$.

3. Utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy esplicito, approssimare la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} y'' = -xy' + y \\ y(1) = 1, \ y'(1) = 0 \end{cases}$$

in $x = 2$, avendo posto il passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\eta_1 = (1, 1/2)^T$, $\eta_2 = (5/4, 5/8)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$2y'' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1 - x, & -1 \le x < 0, \\ 1 - x, & 0 \le x < 1, \\ f(x+2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi(1 - 2k^2\pi^2)} \sin(k\pi x),$$

$f(x)$ non è differenziabile termine a termine, in quanto non continua in $x = 0$.

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k+1)}{3 + \mathrm{i}(k+1)}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\cos(x-3)e^{-x}H(x-3)\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = -3\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{i})x}H(x), \qquad F(k) = \frac{\mathrm{e}^{-3(1+\mathrm{i}k)}}{2}\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}(k-1)} + \frac{1}{1+\mathrm{i}(k+1)}\right].$$