Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
29 gennaio 2019

Compito numero 1

1. Assegnati i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 0)^T$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)^T$, si considerino le matrici $A = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$ e $B = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$ dove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono i vettori definiti nell'esercizio precedente. Si dica se le matrici A e B sono singolari e si determinino spettro e raggio spettrale di A. Si considerino poi le seguenti matrici

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro reali. Si dica quale è il valore di α che rende D l'inversa di C e si calcoli in modo efficiente l'inversa di $E = C^TC$.

Soluzione Le matrici A e B sono singolari

$$\sigma(A) = \left\{0, 3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\right\}, \quad \rho(A) = 3 + \sqrt{5},$$

$$\alpha = 1/2, \quad E^{-1} = DD^T = \begin{bmatrix} 5 & -7/2 \\ -7/2 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2\alpha & 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

deteminare per quali valore del parametro α la matrice A è invertibile e per quali il metodo di Jacobi risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 1$, si eseguano le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $Ax = b$ con $b = [3\,3\,4\,2]^T$ considerando il vettore iniziale $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$.

Soluzione. La matrice A è invertibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,\, 2\}$. Il metodo di Jacobi converge se $-2 < \alpha < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3/2,\, 3/2,\, 1/2,\, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/4,\, 5/4,\, 3/4,\, 3/4]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x+1}, & x \in [1, 4] \\ y(1) = 0, y'(1) = 1/2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/8,\, 9/16)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (17/64, 5/8)^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

$$y' + \frac{5}{9}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < -\frac{9}{5}, \\ \cos x, & -\frac{9}{5} \le x \le \frac{9}{5}, \\ -1, & \frac{9}{5} < x \le \pi. \end{cases}$$

La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = a_o + a_1 \cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx)\,,$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right) - \pi + \frac{9}{5}\right), \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{9}{5} + 2\sin\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{18}{5}\right)\right\}$$
$$a_k = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{9}{5}k\right) + \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right)\cos\left(\frac{9}{5}k\right) - k\cos\left(\frac{9}{5}\right)\sin\left(\frac{9}{5}k\right)\right).$$

La serie di Fourier cercata è

$$S_y(x) = \frac{9}{5}a_0 + \left(\frac{45}{106}\right)a_1\cos(x) + \left(\frac{81}{106}\right)a_1\sin(x)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{45}{25+81k^2}\right)a_k\cos(kx) + \left(\frac{81k}{25+81k^2}\right)a_k\sin(kx)\,.$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{7\mathrm{i}k}}{5+(k+1)^2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{-\sqrt{5}|x+7|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+7)}$$
$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left[H(2-k) - H(-k-6)\right].$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

29 gennaio 2019

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 & \beta & 1/4 \\ \beta & 1 & \beta \\ 1/4 & \beta & 3/4 \end{bmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori di α per cui la matrice A è non singolare e per quali è definita positiva. Fissato $\alpha = 1$, si determinino i valori di β che rendono B inversa di A, e si calcoli il numero di condizionamento di A in norma 1, ∞ e 2. Infine, dopo avere verificato che Q è ortogonale, si risolva nel modo più conveniente il sistema $Qx = b$ dove b è il vettore unitario.

Soluzione. La matrice è non singolare per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}/2\}$ ed è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$. La matrice B è l'inversa di A se $\beta = 1/2$,

$$cond(A)_1 = cond(A)_\infty = 8, \qquad cond(A)_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \qquad x = [1/3,\, 5/3,\, -1/3]^T.$$

2. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante di A e la terza colonna dell' inversa di A.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -10, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-3/10,\, -3/5,\, 1/10,\, 3/10]^T.$$

3. Si classifichi e si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza del seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Si classifichi e si studi, inoltre, al variare del parametro reale δ la stabilità del seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_k - \frac{\delta}{4}\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

Soluzione. Il primo schema è di tipo monostep esplicito ed è stabile, consistente del secondo ordine e quindi convergente del seguente ordine. Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per $-2 \le \delta \le 2$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

$$y' + \frac{5}{9}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < -\frac{9}{5}, \\ \cos x, & -\frac{9}{5} \le x \le \frac{9}{5}, \\ -1, & \frac{9}{5} < x \le \pi. \end{cases}$$

La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = a_o + a_1\cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right) - \pi + \frac{9}{5}\right), \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\left\{2\sin\left(\frac{9}{5}\right) + \sin\left(\frac{18}{5}\right)\right\}$$

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right)\cos\left(\frac{9}{5}k\right) + k\cos\left(\frac{9}{5}\right)\sin\left(\frac{9}{5}k\right)\right).$$

La serie di Fourier cercata è

$$S_y(x) = \frac{9}{5}a_0 + \left(\frac{45}{106}\right)a_1\cos(x) + \left(\frac{81}{106}\right)a_1\sin(x)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{45}{25+81k^2}\right)a_k\cos(kx) + \left(\frac{81k}{25+81k^2}\right)a_k\sin(kx).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' - 5y = \delta(x+10), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}e^{5(x+10)} & x < -10, \\ -\frac{1}{6}e^{-(x+10)} & x \ge -10. \end{cases}$$