Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

29 gennaio 2019 Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Si dica se i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono normalizzati rispetto alle norme con indice ∞, 1 e 2. Si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

   Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_2$ è normalizzato rispetto alle 3 norme, il vettore $\mathbf{v}_1$ non lo è rispetto a nessuna di esse. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le matrici $A = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$ e $B = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$ dove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono i vettori definiti nell'esercizio precedente. Si dica se le matrici A e B sono singolari e si determinino spettro e raggio spettrale di A. Si considerino poi le seguenti matrici

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

   dove α è un parametro reali. Si dica quale è il valore di α che rende D l'inversa di C e si calcoli in modo efficiente l'inversa di $E = C^T C$.

   Soluzione Le matrici A e B sono singolari

$$\sigma(A) = \left\{0, 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\right\}, \quad \rho(A) = 3+\sqrt{5},$$

$$\alpha = 1/2, \quad E^{-1} = DD^T = \begin{bmatrix} 5 & -7/2 \\ -7/2 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

$$y' + \frac{5}{9}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < -\frac{9}{5}, \\ \cos x, & -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{9}{5}, \\ -1, & \frac{9}{5} < x \leq \pi. \end{cases}$$

La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = a_o + a_1 \cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right) - \pi + \frac{9}{5}\right), \qquad a_1 = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{9}{5} + 2\sin\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{18}{5}\right)\right\}$$
$$a_k = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{9}{5}k\right) + \frac{2}{\pi(1-k^2)}\left(\sin\left(\frac{9}{5}\right)\cos\left(\frac{9}{5}k\right) - k\cos\left(\frac{9}{5}\right)\sin\left(\frac{9}{5}k\right)\right).$$

La serie di Fourier cercata è

$$S_y(x) = \frac{9}{5}a_0 + \left(\frac{45}{106}\right)a_1\cos(x) + \left(\frac{81}{106}\right)a_1\sin(x)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{45}{25+81k^2}\right)a_k\cos(kx) + \left(\frac{81k}{25+81k^2}\right)a_k\sin(kx).$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{7\mathrm{i}k}}{5+(k+1)^2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{-\sqrt{5}|x+7|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+7)}$$
$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left[H(2-k) - H(-k-6)\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' - 5y = \delta(x+10), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{5(x+10)} & x < -10, \\ -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-(x+10)} & x \geq -10. \end{cases}$$