Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

12 novembre 2018

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_3$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e se è un vettore normalizzato rispetto alla norma ∞ e norma 1. Si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si dica, motivando opportunamente la risposta e senza fare calcoli, quali sono gli autovalori della matrice $C = Q^T Q$ dove $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_3$ non è ortogonale ai vettore $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ed è normalizzato rispetto alla norma con indice ∞. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Essendo Q ortogonale, gli autovalori di C sono tutti pari a 1.

2. Si considerino le matrici $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $B = [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ dove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono i vettori definiti nell'esercizio precedente. Si dica se le matrici $C_1 = AA^T$, $C_2 = A^T A$ e $C_3 = B^T B$ sono singolari. Si determinino spettro e raggio spettrale di C_1. Si considerino poi le seguenti matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dove α e β sono due parametri reali. Si dica quale è il valore del parametro α che rende E_1 l'inversa della matrice C_2 e quale è il valore del parametro β che rende E_2 l'inversa della matrice C_3. Infine, motivando opportunamente la risposta si calcoli l'inversa della matrice $P = C_2 C_3^T$. *Suggerimento: nel calcolo del polinomio caratteristico, si consiglia di esplicitare tutti i termini.*

Soluzione La matrice C_1 è singolare, le matrici C_2 e C_3 non sono singolari,

$$\sigma(C_1) = \left\{ 0, \frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right\}, \quad \rho(C_1) = \frac{5+\sqrt{17}}{2},$$

$$\alpha = 3/2, \quad \beta = 1/3, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' + 5y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -4 \le x < -\pi, \\ \cos x, & -\pi \le x < \pi, \\ -1, & \pi \le x \le 4. \end{cases}$$

Soluzione La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = \frac{\pi - 4}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{4}k\pi^2\right)\left[\frac{2}{k\pi} - \frac{2k\pi}{k^2\pi^2 - 16}\right]\cos\left(\frac{k\pi}{4}x\right).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi - 4}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{80 - k^2\pi^2} \sin\left(\frac{1}{4}k\pi^2\right)\left[\frac{2}{k\pi} - \frac{2k\pi}{k^2\pi^2 - 16}\right]\cos\left(\frac{k\pi}{4}x\right).$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}k}{k^2 + 2k + 6}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\cos 3x}{1 + 3\mathrm{i}x}\right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\mathrm{i}\sqrt{5}}{10}\mathrm{e}^{-\sqrt{5}|x| - \mathrm{i}x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\sqrt{5}+\mathrm{i})x}H(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\sqrt{5}-\mathrm{i})x}H(-x), \\ F(k) &= \frac{\pi}{3}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(k-5)}H(5-k) + \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(k+1)}H(-k-1)\right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' + 5y = H(x + 10) - H(x - 6), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -10, \\ \frac{1}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-5(x+10)}\right) & -10 \le x < 6, \\ \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\left(\mathrm{e}^{30} - \mathrm{e}^{-50}\right) & x \ge 6. \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

12 novembre 2018

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Si dica se il vettore $\mathbf{v}_3$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e se è un vettore normalizzato rispetto alla norma ∞ e norma 1. Si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si dica, motivando opportunamente la risposta e senza fare calcoli, quale è il determinante della matrice $C = Q^T Q$ dove $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$.

   Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_3$ non è ortogonale ai vettore $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ed è normalizzato rispetto alla norma con indice ∞. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

   Essendo Q ortogonale, $\det(C) = 1$.

2. Si considerino le matrici $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $B = [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ dove $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono i vettori definiti nell'esercizio precedente. Si dica se le matrici $D_1 = AA^T$, $D_2 = A^T A$ e $D_3 = B^T B$ sono singolari. Si determinino spettro e raggio spettrale di D_1. Si considerino poi le seguenti matrici

$$E_2 = \begin{bmatrix} \delta & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

   dove δ e γ sono due parametri reali. Si dica quale è il valore del parametro δ che rende E_2 l'inversa della matrice D_2 e quale è il valore del parametro γ che rende E_3 l'inversa della matrice D_3. Infine, motivando opportunamente la risposta si calcoli l'inversa della matrice $P = D_2^T D_3$. *Suggerimento: nel calcolo del polinomio caratteristico, si consiglia di esplicitare tutti i termini.*

   Soluzione La matrice D_1 è singolare, le matrici D_2 e D_3 non sono singolari,

$$\sigma(D_1) = \left\{ 0, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right\}, \quad \rho(D_1) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2},$$

$$\delta = \gamma = 3/2, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' + 5y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Soluzione. La serie di Fourier del termine noto è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{k\pi} - \frac{2k\pi}{k^2\pi^2 - 4} \right] \cos\left(\frac{1}{4}k\pi^2\right) + \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \right\} \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{20 - k^2\pi^2} \left\{ \left[\frac{2}{k\pi} - \frac{2k\pi}{k^2\pi^2 - 4} \right] \cos\left(\frac{1}{4}k\pi^2\right) + \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \right\} \sin\left(\frac{1}{2}k\pi x\right).$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}k}{k^2 - 4k + 6}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x}\sin 5x}{1 - 5\mathrm{i}x}\right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|x|+2\mathrm{i}x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\sqrt{2}-2\mathrm{i})x}H(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\sqrt{2}+2\mathrm{i})x}H(-x), \\ F(k) &= \frac{\pi}{5\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(k-12)}H(k-12) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(k-2)}H(k-2)\right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' - 5y = H(x-4) - H(x-8), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\left(\mathrm{e}^{-40} - \mathrm{e}^{-20}\right) & -x < 4, \\ \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{5(x-8)} - 1\right) & 4 \leq x < 8, \\ 0, & x \geq 8. \end{cases}$$