

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

25 ottobre 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la terza colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -80, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -3a & a & 0 \\ a & a & 2a \\ 0 & a & 2a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a la matrice A è invertibile. Si studi al variare del parametro a la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $a = 1$, si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è invertibile per $a \neq 0$. Il metodo di Jacobi converge per ogni valore di $a \neq 0$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 0, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/3, 1, 1/2]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2xy, & x \in [1, 3] \\ y(1) = 2, y'(1) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (5/2, 3)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (4, 27/4)^T$.

4. Risolvere la seguente equazione differenziale mediante la serie di Fourier

$$3y'' + 2y = 1 - |x|, \quad x \in [-2, 2].$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16[1 - (-1)^k]}{k^2\pi^2(8 - 3k^2\pi^2)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' + 2y = H(x - 2) - H(x - 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}(x-2)}\right), & 2 \leq x < 3, \\ \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2}{3}x-2} - e^{-\frac{2}{3}(x-2)}\right), & x \geq 3. \end{cases}$$