Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
27 giugno 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 12 \\ 18 & 6 & 6 & 12 \\ 6 & 2 & 5 & 11 \\ 9 & 14 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [12, 6, 9, 0]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -1188, \quad x = [0, -1, 0, 1].$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo avere determinato i valori del parametro α che rendono la matrice definita positiva, si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

Soluzione. A è definita positiva per $\alpha > 1$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha < -1$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 1/2, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [2, 3/4, 1/4]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y' - 1)x - y, & x \in [\frac{1}{2}, 7] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\eta_1 = (1, -3/4)^T$, $\eta_2 = (5/8, -17/8)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{6}x, \qquad x \in [-2, 2].$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(9k^2-1)}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$7y' - 3y = \mathrm{e}^{-(x+5)}H(x+5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{3}{7}(x+5)}, & x \leq -5, \\ -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-(x+5)}, & x > -5. \end{cases}$$