Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

23 febbraio 2018

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [-5, 2, -2, 4]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/10 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1/10 & -3/11 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10/3 & 25/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -11/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 81/11 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -810, \quad x = [1,\, -1,\, 1,\, -1]\,.$$

2. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 = -1 \\ \alpha x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq \pm 2\sqrt{2}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2/3, 0, -1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/3, 1/9, 1/3]^T$.

3. Considerato il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - \dfrac{y_2}{x}, \\ y_1(2) = 0, \quad y_2(2) = 1, \quad x \in [2, 5], \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 3$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1/2, 3/4)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-3/2, 7/20)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = 2x + 5, \qquad x \in [-3,\, 3]$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$f(x) = 5 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12(-1)^k}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)$$

La funzione f non è differenziabile termine a termine.

5. Eseguire i seguenti calcoli, dove $*$ indica l'operatore di convoluzione

$$[H(x+3) - H(x-4)] * e^{-|x|}, \quad \mathcal{F}\left\{\left(e^{-2x} H(x) \sin 4x\right) * \left(\frac{e^{-2\mathrm{i}x}}{2x^2+1}\right)\right\}.$$

Soluzione.

$$[H(x+3) - H(x-4)] * e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}(e^4 - e^{-3}), & x > 4 \\ (1 - e^{-(4-x)}) + (1 - e^{-(3+x)}), & x \in [-3,\, 4] \\ e^{x}(e^{-4} - e^{3}), & x < -3 \end{cases}$$

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\mathrm{i}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}|k-2|} \left(\frac{1}{2 + \mathrm{i}(k-4)} - \frac{1}{2 + \mathrm{i}(k+4)}\right)$$