Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
10 gennaio 2018

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione. Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(B) = \text{cond}_\infty(B) = 9/5$, $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(B) = \sqrt{5}/2$, $\text{cond}_1(C) = \text{cond}_\infty(C) = 2$, $\text{cond}_2(C) = 1$; $\rho(A) = \sqrt{5}$; $\mathbf{x} = C^{-1}B^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = (-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})^T$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -12 \\ 12x_1 + 18x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12^4 = -20736, \quad \mathbf{x} = [-2, 0, 2, -1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \alpha x_3 = 1 \\ 2x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 4$. Il metodo di Jacobi converge se $-4 < \alpha < 4$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1/2, 3/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/8, -1/2, 5/8]^T$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{3}, & -3 \leq x < 0, \\ 1 - \frac{x}{3}, & 0 \leq x < 3, \\ f(x+6), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k) \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cos(\pi x)}{2(3 - ix)}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-3ik}}{5 + (k-2)^2}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{2}[e^{-3(k-\pi)}H(k-\pi) + e^{-3(k+\pi)}H(k+\pi)]$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{5}}e^{2i(x-3)}e^{-\sqrt{5}|x-3|}$$