Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

25 gennaio 2018

Compito numero 1

1. Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A, il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞.

Soluzione. Le matrici M e U sono una l'inversa dell'altra se $\beta = -\frac{1}{8}$; A è simmetrica se $\alpha = 1$;

$$A^{-1} = M^{-1}L^{-1} = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}$; $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{21-\sqrt{185}}$, $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_\infty(A) = \frac{25}{4}$.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la si usi per calcolare il determinante di A e la seconda e la terza colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -4, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzione. A è non singolare se $\alpha \neq \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{\frac{8}{3}} < \alpha < \sqrt{\frac{8}{3}}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, -2/3, -1]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [11/9, -1/3, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{3y'}{2x} - 1, \quad x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{3}{4}, 2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{7}{4}, 3)^T$.

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{1}{3}\alpha h \left[f(x_k, \eta_k) + 5f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$

   (b) $\eta_{k+1} = (3\gamma + 2)\eta_k - (2\gamma^2 + 3\gamma + 1)\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1}).$

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

Soluzione. Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha, inoltre, ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/5$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 0$.