**Nome e matricola:** ..........................................................

**Corso di studi:** ..............................................................

**Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata**

25 gennaio 2018

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si dica se il vettore $v_2$ è ortogonale ai vettori $v_1$ e $v_3$ e si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si indichi, inoltre, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta l'inversa della matrice $B = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$.

   *Soluzione.* Il vettore $v_2$ non è ortogonale nè a $v_1$ nè a $v_3$. I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{66}}{66} \\ -\frac{2\sqrt{66}}{33} \\ \frac{\sqrt{66}}{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}}{11} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

   $B^{-1} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]^T$.

2. Si consideri il vettore $\mathbf{w} = [\alpha, 0, 1]^T$ dove $\alpha$ è un parametro reale. Si calcoli al variare del parametro $\alpha$ la norma $\infty$ di $\mathbf{w}$, e si dica qual'è quell'unico valore di $\alpha$ che rende $w$ un vettore unitario in norma 1 e 2. Si costruisca la matrice $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ e si dica per quali valori di $\alpha$ la matrice è singolare. Fissato il valore $\alpha = 2$ si determini lo spettro e raggio spettrale della matrice.

   *Soluzione.*

$$\|\mathbf{w}\|_\infty = \begin{cases} 1, & \text{se} -1 \leq \alpha \leq 1, \\ |\alpha|, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Per $\alpha = 0$ il vettore è unitario sia in norma 1 che in norma 2. $A$ non è mai singolare. $\sigma(A) = \{1, 1, -9\}$ $\rho(A) = 9$.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2,2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x)+y(x)=f(x), \quad f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<0,\\ 2+x, & 0\le x<2.\end{cases}$$

*Soluzione.*

$$y(x)=2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k-1)+\frac{4(-1)^k}{4+k^2\pi^2}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)-\frac{8(-1)^k}{k\pi(4+k^2\pi^2)}\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k-2)}{9+(k-2)^2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{H(-x)\cos 3x}{\mathrm{e}^{-4x}}\right\}.$$

*Soluzione.*

$$\begin{aligned} f(x)&=-\frac{1}{2}e^{2i(x-3)}(e^{-3(x-3)}H(x-3)-e^{3(x-3)}H(3-x))\\ F(k)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-i(k-3)}+\frac{1}{4-i(k+3)}\right)\end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'(x)-4y(x)=e^{-3x}H(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x)=-\frac{1}{7}\left(e^{-3x}H(x)-e^{4x}H(-x)\right)$$