Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

21 luglio 2016

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -a^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$
si determini i valori del parametro reale a che rendono A invertibile e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (6, 8, 0)^T$. Posto $a = 1$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

   Soluzione. Invertibile $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{6}\}$. Gauss Seidel converge per $-\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$. Iterazioni di Gauss Seidel: $\mathbf{x}^{(1)} = (2/3, 4, 2/3)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-8/9, 4, 13/9)^T$.

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 12 & 18 \end{bmatrix},$$
la si utilizzi per calcolare il determinante e l'inversa di A.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = -64, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{32} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{16} \\ \frac{1}{8} & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 2}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{\alpha}{\beta}h, \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

   Soluzione. Stabile $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $\forall \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Convergente per $\alpha = 5$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Secondo ordine per $\alpha = 5$ e $\beta = 20/3$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/2), \\ 2x, & x \in [-1/2, 1/2), \\ 1, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Soluzione. Secondo me dovrebbe essere

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\frac{2}{k\pi} \sin k\frac{\pi}{2} - (-1)^k \right] \sin k\pi x.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' - 2y' + 3y = \delta(x - 3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\, e^{-3(x-3)}, & x \geq 3 \\ \frac{1}{4}\, e^{x-3}, & x < 3 \end{cases}$$