

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

23 marzo 2016

1. Calcolare il numero di condizione rispetto alle norme con indice 1, 2 e  $\infty$  della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

al variare del parametro reale  $\alpha$ .

2. Si consideri la matrice  $A = B + B^T$ , dove  $B$  è la matrice dell'esercizio precedente. Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro  $\alpha$  la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [0, 1, 2]^T$ . Infine, posto  $\alpha = \frac{1}{3}$  si calcoli la fattorizzazione PA=LU e la si utilizzi per calcolare l'inversa di  $A$ .
3. Dire per quali valori dei parametri  $\alpha \in \mathbb{R}$  il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{3} f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)) \right].$$

Fissato uno di questi valori, applicare il precedente metodo per calcolare le prime due iterate del seguente problema di Cauchy con passo  $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = -2xy + 1 & x \in [0, 4] \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}(\pi + x), & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], \\ \sin(x), & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x), & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-\infty, \infty]$

$$\sqrt{2}y' + 3y = e^{2x}H(-x).$$