

Nome e matricola:

Corso di studi:

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

14 gennaio 2016

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}$$

dove α e β sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A . Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞ .

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = \frac{3}{2}$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1, 0]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x+1)y, & x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite e se ne studi la stabilità

$$(a) \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{4}h \left[f(x_k, \eta_k) + \alpha f\left(x_k + \frac{h}{\beta}, \eta_k + \frac{h}{\beta}f(x_k, \eta_k)\right) \right], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(b) \quad \eta_{k+1} = \frac{1}{2}\eta_k - 2\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

Si determini, inoltre, se sono convergenti e, in caso affermativo, il relativo ordine.

Nome e matricola:

Corso di studi:

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

14 gennaio 2016

Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 4\delta & -\delta \\ 0 & -\delta & 3\delta \end{bmatrix}$$

dove γ e δ sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di δ B è la matrice inversa di A . Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di γ il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞ .

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. Posto $\gamma = \frac{3}{2}$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x + y)y', & x \in [\frac{1}{2}, 5] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite e se ne studi la stabilità

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\gamma}{3}h \left[f(x_k, \eta_k) + \frac{\gamma}{2}f\left(x_k + \frac{h}{\delta}, \eta_k + \frac{h}{\delta}f(x_k, \eta_k)\right) \right], \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R},$

(b) $\eta_{k+1} = 2\eta_k - 3\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$

Si determini, inoltre, se sono convergenti e, in caso affermativo, il relativo ordine.