Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

3 novembre 2015

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
e si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A. La si utilizzi per calcolare il determinante di A e si deduca se A è invertibile. Se lo è, si calcoli, mediante la fattorizzazione PA=LU, la quarta colonna della matrice inversa.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Dire per quali valore del parametro reale α la matrice A è invertibile e per quali il metodo di Gauss-Seidel è convergente. Fissato $\alpha = 3$, si calcolino quindi le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T$.

3. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy
$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{\alpha h}{3} \left[f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{\alpha h}{3}, \eta_i + \frac{\alpha h}{3} f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$
e studiarne la convergenza e l'ordine al variare del parametro reale α.

4. Risolvere ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale
$$3y'' + 2y' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ f(x+1), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in $\mathbb{R}$
$$3y' - y = \mathrm{e}^{-4x} H(x).$$