Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

15 gennaio 2015

1. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
e si calcoli la terza colonna dell'inversa di A.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

3. Dire per quale coppia di valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è contemporaneamente stabile, convergente e del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha + 2}{\beta - 1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{1}{2}h, \eta_k + \frac{1}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$
Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{3}{4} \right) \eta_{k-1} + h \left[(1 + \gamma^2) f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1)) f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, la seguente equazione differenziale
$$y'' - 5y' + \sqrt{3}y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x < 0, \\ -3x + \frac{\pi}{2}, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ f(x + \pi) = f(x). \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:
$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-2ik} \frac{2i(k-2)}{4 + (k-2)^2} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{x}{x^2 + 9} \right\}.$$