Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata
2 febbraio 2015

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & -\beta/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -\beta/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice A è invertibile, per quali è definita positiva e per quali valori di β la matrice B è l'inversa di A. Si calcoli, infine, al variare di β l'indice di condizionamento di A con indice 1 e ∞.

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 12 & -6 \\ 2 & -3 & 14 & -7 \\ 4 & -3 & 10 & -9 \\ 8 & -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la terza colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2y' + y + x, \quad x \in [0, 5] \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione nel punto $x = \frac{3}{2}$.

Esercizio 5 sul retro del foglio

5. Si consideri il seguente schema alle differenze finite dove α, β sono due parametri reali positivi

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{2}{\alpha - 1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{\beta^2}{2} h, \eta_k + \frac{\beta^2}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Si dica per quali valori di α e β il metodo è stabile, per quali è convergente del primo ordine e per quali è convergente del secondo ordine. Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + h \left[(1 + \gamma^2) f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1) f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$