Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
21 novembre 2014

1. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -\alpha & 2\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca se Q è ortogonale e si determini il parametro α che rende S la matrice inversa di R. Si calcoli la matrice $A = QR$. Si dica se A è invertibile, si calcolino i suoi autovalori (sapendo che uno di essi è pari a 1) e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, l'inversa di A .

2. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 3 \\ 9 & 18 & 3 \end{bmatrix}$$

   e la si utilizzi per determinare l'inversa di A e il suo determinante.

3. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{5}\Big[2f(x_i, \eta_i) + \alpha f(x_i + 3\beta h, \eta_i + 3\beta h f(x_i, \eta_i))\Big] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

   e dire per quali valori dei parametri α e β è consistente e per quali valori il suo ordine è almeno 2. Dire infine se tale metodo è stabile e se è convergente, spiegando perché.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$

$$-5y'' + 2y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 6(1 + \frac{x}{5}), & -5 \le x < 0, \\ 6(1 - \frac{x}{5}), & 0 \le x < 5, \\ f(x + 10), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y'' + 5y = e^{2x} H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$