

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

25 giugno 2014

1. Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ -3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Dopo avere dimostrato che la matrice

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

è unitaria, se ne calcoli il numero di condizionamento rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞ . Si risolva quindi il sistema lineare $V\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 0, -1)^T$, e si calcoli il valore della forma quadratica $\mathbf{b}^T V \mathbf{b}$.

3. Classificare i seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{7} \left[f(x_k, \eta_k) + 6f \left(x_k + \frac{5}{8}h, \eta_k + \frac{5}{8}hf(x_k, \eta_k) \right) \right],$$
$$\eta_{k+2} = 3\eta_{k+1} - 2\eta_k + \frac{1}{2}f(x_k, \eta_k),$$

e discuterne convergenza e ordine.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = \begin{cases} (x-2)H(x-2), & x \in [-3, 3], \\ f(x+6), & \text{altrove.} \end{cases}$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3ik}}{2k} \sin(6k) \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ e^{-3x^2} \cos(\pi x) \right\}.$$