**Nome e matricola:** ..............................................................

**Corso di studi:** ..................................................................

**Prova scritta di Matematica Applicata**

10 gennaio 2014

Compito numero 2

1. Si consideri la matrice $A = I - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dove $\mathbf{w} = [-1, 1, 1]^T$ e $\rho = \frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}$. Si dica se la matrice $A$ è simmetrica e/o ortogonale. Si calcoli poi il condizionamento in norma 1, 2 e $\infty$ della matrice e si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $A^3\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Teoricamente cosa si può dire sul determinante di $A^2$?

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 3}\left[f(x_k, \eta_k) + 5f\left(x_k + \frac{\alpha}{\beta}h, \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - (1 + \gamma^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, la seguente equazione differenziale in $[-3, 3]$
$$2y'' - 3y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} x, & -3 \le x < -2, \\ \dfrac{2}{\pi}, & -2 \le x < 2, \\ -x, & 2 \le x < 3. \end{cases}$$
La funzione $f(x)$ è derivabile termine a termine?

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale
$$y'' - 5y = \mathrm{e}^{2x}H(-x),$$
dove $x \in \mathbb{R}$ e $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.