Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

31 gennaio 2014

Compito numero 1

1. Assegnate le matrici
$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ b & -1 & b & 0 \\ -b & -a & a & b \end{bmatrix},$$
determinare i valori dei parametri a e b che rendono la matrice M l'inversa di L. Dopo avere sostituito i valori di a e b trovati, calcolare il condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e ∞ delle matrici L, M e $A = L^T L$. Dire infine quali sono gli autovalori di L e di L^3 e, posti $a = 1$ e $b = 0$, calcolare $\|M\|_2$.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

3. Posto $\alpha = 3$ nella matrice dell'esercizio precedente, se ne calcoli il determinante e l'inversa mediante la fattorizzazione $PA = LU$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = x^2 y - 2y', \quad x \in [-1, 2] \\ y(-1) = 1, y'(-1) = 0 \end{cases}$$
e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2} \left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = -\gamma \eta_k + 2(2 + \gamma)\eta_{k-1} + h \left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$