Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2014

Compito numero 1

1. Si consideri la matrice $A = I - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dove $\mathbf{w} = [3, 1, 1]^T$ e $\rho = \frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}$. Si dica se la matrice A è simmetrica e/o ortogonale. Si calcoli poi il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice e si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $A^3\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Teoricamente cosa si può dire sul determinante di A^2?

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 4$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$. Infine si dica, motivando la risposta, se nel caso in cui $\alpha = 10$ si possono trarre a priori conclusioni sulla convergenza dei metodi esaminati.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = x^2 y - xy', \quad x \in [2, 5] \\ y(2) = 1, y'(2) = 0 \end{cases}$$
e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 3}\left[f(x_k, \eta_k) + 5f\left(x_k + \frac{\alpha}{\beta}h, \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - (1 + \gamma^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

10 gennaio 2014

Compito numero 2

1. Si consideri la matrice $A = I - \rho \mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dove $\mathbf{w} = [-1, 1, 1]^T$ e $\rho = \frac{2}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}$. Si dica se la matrice A è simmetrica e/o ortogonale. Si calcoli poi il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice e si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $A^3\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Teoricamente cosa si può dire sul determinante di A^2?

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 1 \\ 0 & 2 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 4$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$. Infine si dica, motivando la risposta, se nel caso in cui $\gamma = 10$ si possono trarre a priori conclusioni sulla convergenza dei metodi esaminati.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = xy - x^2 y', \quad x \in [2, 5] \\ y(2) = 0, y'(2) = 1 \end{cases}$$
e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

5. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\beta - 5}\left[f(x_k, \eta_k) + 3f\left(x_k + \frac{\beta}{\alpha}h, \eta_k + \frac{\beta}{\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Stabilire, inoltre, al variare di $\delta \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile
$$\eta_{k+1} = 2\delta\eta_k - (1 + \delta^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$