Esercizi sulla fattorizzazione QR

1. Applicare il primo passo dell'algoritmo di fattorizzazione QR di Householder alla matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Calcolare la fattorizzazione QR della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
mediante l'algoritmo di Householder.

3. Calcolare la fattorizzazione QR della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
mediante l'algoritmo di Givens.

4. Applicare il primo passo dell'algoritmo di fattorizzazione QR di Householder alla matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Triangolarizzare la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
mediante un algoritmo di fattorizzazione QR.

6. Calcolare la fattorizzazione QR della matrice del sistema lineare
$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
ed utilizzarla per determinarne la soluzione.

7. Calcolare la fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 0, 0)^T$.

8. Costruire il polinomio di terzo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	6	9	6	3	6

risolvendo il sistema delle equazioni normali ad esso associato mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting. Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante.

9. Considerata la matrice A del sistema sovradeterminato associato all'esercizio precedente, determinare la matrice elementare di Householder che consente di effettuare il primo passo dell'algoritmo di fattorizzazione $A = QR$.

10. Eseguire la fattorizzazione QR mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt modificato della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 0, 0, 1)^T$.