Trasformata di Fourier mediante `fft`/`ifft`

Siano

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega x}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega x}\, d\omega.$$

Approssimiamo la trasformata con la formula dei trapezi (N pari)

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \\ &\simeq \int_{p}^{q} g(x)\, dx \simeq \frac{\Delta x}{2}\left[g(p) + 2\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} g(x_k) + g(q)\right],\end{aligned}$$

con $g(p|q) \simeq 0$. Se $A = q - p$ e x_0 indica il punto medio dell'intervallo $[p, q]$, la discretizzazione di $N + 1$ punti è definita da

$$x_k = k\Delta x + x_0, \qquad \Delta x = \frac{A}{N}, \qquad k = -\frac{N}{2}, \ldots, 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}.$$

Si ha

$$\hat{f}(\omega) = \frac{A}{N}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(x_k)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega x_k} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega x_0}\frac{A}{N}\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f_k \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega k\frac{A}{N}}$$

Ci interessa campionare ω nell'intervallo $[r, s]$, sia $\Omega = s - r$ e $\omega_0 = \frac{r+s}{2}$ il punto centrale. Per usare la `fft` dobbiamo scegliere un particolare campionamento

$$\omega_j = j\Delta\omega + \omega_0, \qquad \Delta\omega = \frac{\Omega}{N} = \frac{2\pi}{A},$$

che, posto $\omega_N = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{N}}$, implica

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_j k\frac{A}{N}} &= \omega_N^{-jk}\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_0 k\frac{A}{N}}, \\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_j x_0} &= \mathrm{e}^{-\mathbf{i}j\frac{2\pi}{A}x_0}\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_0 x_0}.\end{aligned}$$

Gli intervalli di integrazione e i passi di discretizzazione non sono indipendenti, dato che valgono le relazioni di reciprocità

$$A \cdot \Omega = 2\pi N, \qquad \Delta x \cdot \Delta\omega = \frac{2\pi}{N}.$$

Per questo motivo, fissato N, l'intervallo $[p, q]$ e ω_0 individuano univocamente l'intervallo $[r, s]$ e x_0, e viceversa.

Posto $\rho = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_0 x_0}$, $\delta_j = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}j\frac{2\pi}{A}x_0}$ e $\sigma_k = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega_0 k\frac{A}{N}}$,

$$\hat{f}_j = \rho\delta_j \frac{A}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} (\sigma_k f_k)\omega_N^{-jk},$$

$$f_k = \rho^{-1}\sigma_k^{-1} \frac{1}{A} \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} (\delta_j^{-1} \hat{f}_j)\omega_N^{jk},$$

cioè, posto $D_1 = \mathrm{diag}(\delta_{-\frac{N}{2}}, \ldots, \delta_{\frac{N}{2}-1})$ e $D_2 = \mathrm{diag}(\sigma_{-\frac{N}{2}}, \ldots, \sigma_{\frac{N}{2}-1})$,

$$\hat{\mathbf{f}} = \rho\frac{A}{N} D_1 \texttt{fft}(D_2\mathbf{f}), \qquad \mathbf{f} = \rho^{-1}\frac{N}{A} D_2^{-1} \texttt{ifft}(D_1^{-1}\hat{\mathbf{f}}),$$

dove i vettori in ingresso e uscita sono filtrati con `fftshift`, cioè

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{f}} &= \rho\frac{A}{N} D_1 \texttt{fftshift}(\texttt{fft}(\texttt{fftshift}(D_2\mathbf{f}))),\\
\mathbf{f} &= \rho^{-1}\frac{N}{A} D_2^{-1} \texttt{fftshift}(\texttt{ifft}(\texttt{fftshift}(D_1^{-1}\hat{\mathbf{f}}))).
\end{aligned}$$