

Prova scritta di Calcolo Numerico 1

9 giugno 2015

1. Calcolare il punto medio del segmento $[a, b]$ di estremi $a = 1.45705$ e $b = 1.45744$ mediante le formule

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = a + \frac{b-a}{2}$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con 5 cifre significative. Spiegare quale delle due formule fornisce il risultato più attendibile e commentare i risultati ottenuti.

2. Si calcolino, al variare del parametro reale β , le norme con indice 1 e ∞ della matrice

$$U = \begin{bmatrix} \beta\sqrt{3} & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -\beta\sqrt{3} \\ 0 & -2\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino quindi i valori del parametro β che rendono ortogonale la matrice e, dopo aver fissato uno di essi, si calcoli il condizionamento della matrice in norma 1, 2, e ∞ , e si risolva il sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$.

3. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α la matrice è invertibile e per quali è definita positiva. Si stabilisca, inoltre, per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$ risulta essere convergente. Infine, fissato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi usando il vettore iniziale $[1, 0, 1]^T$

4. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{5} [7f(x_i, \eta_i) - \alpha f(x_i + \alpha\beta h, \eta_i + \alpha\beta h f(x_i, \eta_i))] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

è convergente. Sostituiti i valori di α e β che rendono il metodo del second'ordine, e posto $h = \frac{1}{2}$, calcolare i valori di η_1 e η_2 per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -xy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$