Prova scritta di Calcolo Numerico 1
25 gennaio 2013

1. Determinare i valori dei parametri α e β che rendono ortogonali le matrici

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \beta \\ 0 & 0 & \beta & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

   Assegnati ad α e β uno dei valori trovati, calcolare il numero di condizione rispetto alle norme 2 e ∞ di P e Q, giustificando il procedimento utilizzato. Determinare, infine, l'inversa di $R = PQ$.

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

   e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

   Stabilire per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1\ 2\ 3]^T$. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 1\ 0]^T$.

4. Dire per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{2} f(x_k + \alpha h, \eta_k + \alpha h f(x_k, \eta_k))\right].$$