Esercizi di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

1. Dati i tre numeri

$$a = -37679, \quad b = 37654, \quad c = 25.874,$$

si calcolino le quantità

$$(a + b) + c \quad \text{e} \quad a + (b + c)$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 5 cifre significative. Commentare i risultati.

2. Calcolare le somme $(a + b) + c$ e $a + (b + c)$, essendo

$$a = 2122, \quad b = 7877 \quad \text{e} \quad c = -7872,$$

in un sistema in virgola mobile $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ con $\beta = 10$, $U = -L = 4$ e con $t = 4$ oppure $t = 3$. Commentare i risultati ottenuti.

3. Calcolare il punto medio del segmento $[a, b]$ di estremi $a = 1.45705$ e $b = 1.45744$ mediante le formule

$$c_1 = \frac{a + b}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = a + \frac{b - a}{2}$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con 5 cifre significative. Spiegare quale delle due formule fornisce il risultato più attendibile e commentare i risultati ottenuti.

4. Calcolare $c = (a - b)(a + b)$ e $d = a^2 - b^2$, in corrispondenza ai valori

$$a = 1.235 \quad \text{e} \quad b = 1.234,$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con 4 cifre significative. Commentare i risultati ottenuti.

5. Dire per quali valori del parametro α la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \\ 1 & \alpha & 1 \\ & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

è non singolare e per quali valori risulta definita positiva (cioè ha tutti gli autovalori positivi).

6. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}$$

dove α e β sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A. Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

7. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile. Fissato $a = 1$, si calcoli lo spettro di A, il suo raggio spettrale e per quale valore di b la matrice $C = LU$ è l'inversa di A. Fissato tale valore di b, motivando la risposta, si dica qual'è lo spettro di C^2, il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2.

8. Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = QR.$$

Si dimostri che Q è ortogonale e si calcoli il suo numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞. Si dica, motivando la risposta, se R è invertibile e se è definita positiva. Si risolva, nel modo più conveniente, il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

9. Calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Calcolare il numero di condizione rispetto alle norme con indice 1, 2 e ∞ della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

al variare del parametro reale α.

11. Si consideri la matrice $A = B + B^T$, dove B è la matrice dell'esercizio precedente. Si dica per quali valori di α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [0, 1, 2]^T$. Infine, posto $\alpha = \frac{1}{3}$ si calcoli la fattorizzazione PA=LU e la si utilizzi per calcolare l'inversa di A.

12. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + \dfrac{14}{3}x_3 = 20 \\ x_1 + \dfrac{7}{2}x_2 + \dfrac{5}{2}x_3 = \dfrac{31}{2} \end{cases}$$

mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting.

13. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & & \\ -2 & 4 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

14. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

15. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la quarta colonna della sua inversa.

16. Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ -3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

17. Calcolare le prime due iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ risultanti dall'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Seidel al sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix},$$

utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Dire se il metodo risulta convergente.

18. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori dei parametri α e β la matrice A è invertibile e per quali è simmetrica definita positiva. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1 \ -2 \ 0]^T$. Si studi al variare dei parametri α e β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

19. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta non singolare e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (3, 2, 4, 2)^T$, risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 1)^T$.

20. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

si determini i valori del parametro reale α che rendono A singolare, quelli che la rendono definita positiva, e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Gauss–Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (5, 6, 5)^T$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

21. Determinare un intervallo che contenga lo zero dell'equazione

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

e calcolare le prime due iterazioni del metodo di Newton, utilizzando il punto iniziale $x_0 = 2$. Dire se la convergenza del metodo è del primo o del secondo ordine.

22. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

e dire se la radice è singola o multipla. Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.

23. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x - 2\sin x = 0$$

e dire se la radice è singola o multipla. Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.

24. Scrivere l'espressione del metodo di Newton per il calcolo del valore di $\sqrt{2}$. Partendo dal punto iniziale $x_0 = 2$, si calcolino le prime tre iterazioni del metodo. Dire se la convergenza è del primo o del secondo ordine.

25. Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola $\sin(2x)$ nei punti di ascissa 0, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ e valutarlo in $x = -\frac{\pi}{4}$. Cosa si può dire, in questo particolare esempio, sull'errore di interpolazione?

26. Costruire il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	0	1	2
y_i	1	1	2

sia nella base canonica che nella forma di Lagrange. Utilizzare la forma di Lagrange per calcolare il polinomio interpolante nel punto di ascissa -1.

27. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	0	3
y_i	-15	-4	-1	20

e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 1$.