Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
4 luglio 2017

1. Si calcoli la differenza $c = a - b$, con $a = 99950$ e $b = 99944$, in un sistema in virgola mobile in base 10, con esponente compreso tra -5 e 5 e con un numero di cifre significative pari a 5, 4 e 3. Commentare i risultati ottenuti.

   Soluzione. Per $t = 5$, $c = 0.6 \cdot 10^1$, $\rho = 0$; per $t = 4$, $c = 0.1 \cdot 10^2$, $\rho \simeq 0.66$; per $t = 3$ si verifica un overflow.

2. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

   ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di A^{-1}.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 12/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -12, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (4/3, -5/6, 7/6, -1)^T.$$

3. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   dire per quali valori del parametro reale α A è invertibile, e per quali valori il metodo di Gauss Seidel risulta convergente se applicati al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\alpha = -1$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$.

   Soluzione. Invertibile $\forall \alpha \neq 0, 2$, Gauss–Seidel converge per $-6 < \alpha < 2$. Iterazioni di Gauss–Seidel: $\mathbf{x}^{(1)} = (1, -1/4, 1/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (5/8, -1/16, 1/8)^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$e^x - 1 - 2x = 0.$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Dire qual'è l'ordine di convergenza dei due metodi, giustificando la risposta.

Soluzione. Radice $\alpha \in [1, 2]$. Iterazioni di bisezione: $c_0 = 3/2$, $c_1 = 5/4$, $c_2 = 11/8$. Iterazioni di Newton: $x_0 = 2$, $x_1 \simeq 1.56$, $x_2 \simeq 1.33$. Il metodo di bisezione ha sempre ordine $p = 1$. Newton ha ordine $p = 2$, perché la derivata prima $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2$ si annulla in $x = \log(2)$, che non appartiene all'intervallo contenente la radice dell'equazione.

5. Costruire il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	0	1	3
y_i	3	-1	-3

sia in forma canonica che utilizzando la rappresentazione di Lagrange. Calcolare inoltre il valore assunto dai due polinomi nel punto di ascissa $x = 2$.

Soluzione.

$$p_2(x) = x^2 - 5x + 3 = 3L_0(x) - L_1(x) - 3L_2(x),$$

con

$$L_0(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x-3), \quad L_1(x) = -\frac{1}{2}x(x-3), \quad L_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1);$$

inoltre $p_2(2) = -3$.