Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
16 gennaio 2017

1. Calcolare le espressioni $(a+b)+c$ e $a+(b+c)$, essendo

$$a = 82727, \quad b = -82724 \quad \text{e} \quad c = 3.4,$$

in un sistema in virgola mobile $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ con $\beta = 10$, $U = -L = 9$ e con $t = 5$. Calcolare inoltre $(a+b)+c$ anche per $t = 4$. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. Per $t = 5$: $(a+b)+c = 0.64 \cdot 10^1$ (errore relativo $\rho = 0$), $a+(b+c) = 0.6 \cdot 10^1$ ($\rho = 0.0625$). Per $t = 4$: $(a+b)+c = 0.134 \cdot 10^2$ ($\rho = 1.0938$).

2. Si determini, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_3 = -8 \\ 4x_2 + 6x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, sempre mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema e la terza colonna di A^{-1}.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -256, \quad \mathbf{x} = (1, 2, -2, -1)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = (0, 3/8, 0, -1/4)^T.$$

3. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & a \\ 0 & 4 & 2 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

si determini i valori del parametro reale a che rendono A invertibile e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, 1, 0)^T$. Posto $a = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione. Invertibile $\forall a \neq \pm 2\sqrt{3}$. Jacobi converge per $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$. Iterazioni di Gauss-Seidel: $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1/4, -1/8)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1/16, 5/16, -3/16)^T$.

4. Determinare il più piccolo intervallo con estremi interi che contenga la radice positiva dell'equazione
$$x^3 - 3x - 3 = 0.$$
Dire se la radice è singola o multipla, giustificando la risposta, e calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato. Che ordine di convergenza avrebbe il metodo di Newton?

   Soluzione. Radice $\alpha \in (2,3)$. Radice semplice perché $f'(\alpha) > 0$. Iterazioni di bisezione: $c_0 = 5/2$, $c_1 = 9/4$, $c_2 = 17/8$, $c_3 = 33/16$ (bastano le prime 3). Newton avrebbe ordine $p = 2$, perché la radice è semplice.

5. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	0	2	4
y_i	0	-1	0	7

   e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 1$.

   Soluzione.
$$L_0(x) = -\frac{1}{48}x(x-2)(x-4), \quad L_1(x) = \frac{1}{16}(x+2)(x-2)(x-4),$$
$$L_2(x) = -\frac{1}{16}(x+2)x(x-4), \quad L_3(x) = \frac{1}{48}(x+2)x(x-2).$$
$$p_3(x) = -L_1(x) + 7L_3(x), \qquad p_3(1) = -L_1(1) + 7L_3(1) = -1.$$