

## Studio qualitativo dell'equazione $\dot{q}^2 = f(q)$

Spesso i problemi di dinamica ad un solo grado di libertà conducono allo studio di un'equazione del tipo

$$\dot{q}^2 = f(q), \quad (1)$$

con associate le condizioni iniziali

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad (2)$$

dove la funzione  $f(q)$  è una funzione nota del suo argomento, mentre  $q = q(t)$  è la funzione incognita. Supposto di voler studiare la (1) in un sottoinsieme dell'insieme di definizione della  $f(q)$  in cui quest'ultima risulta positiva, da (1) si ottiene (dopo aver estratto la radice quadrata e separato le variabili)

$$t = \int_0^t dt = \int_{q_0}^q \frac{dr}{\pm f(r)}. \quad (3)$$

Posto  $F(q) = \int_{q_0}^q \frac{dr}{\pm f(r)}$ , la (3) fornisce

$$t = F(q), \quad (4)$$

e quest'ultima, invertendo la  $F(q)$ , fornisce la funzione cercata  $q = q(t)$ . Spesso procedere per via puramente analitica è quindi complicato perchè integrare e invertire una funzione non sempre sono operazioni semplici. Per questo motivo si è soliti studiare l'equazione (equivalente alla (1))

$$\dot{q} = \pm \sqrt{f(q)}, \quad (5)$$

da un punto di vista qualitativo ricostruendo l'andamento della funzione  $q = q(t)$  a partire dalle proprietà (note) della  $f(q)$  (negli intervalli della  $q$  in cui  $f(q)$  è positiva).

Per portare a termine questa analisi qualitativa occorre distinguere vari casi.

**Primo caso:** Sia  $f(q)$  una funzione strettamente positiva (vedi figura corrispondente a pagina 5).

In questo caso la funzione  $f(q)$  non si annulla mai e quindi il segno davanti al radicale nella (5) rimane sempre lo stesso, ovvero quello che si presenta all'istante iniziale. Più precisamente si ha:

$$\dot{q} = \sqrt{f(q)}, \quad \text{se } \dot{q}_0 > 0, \quad (6)$$

oppure

$$\dot{q} = -\sqrt{f(q)} \quad \text{se } \dot{q}_0 < 0. \quad (7)$$

Quindi nel caso in cui valga la (6) la funzione  $q = q(t)$  è monotona crescente (perchè  $\dot{q} > 0$ ), mentre nel caso in cui sussista la (7) la funzione  $q = q(t)$  è monotona decrescente (perchè  $\dot{q} < 0$ ).

**Secondo caso:** Sia  $f(q)$  una funzione strettamente positiva nell'intervallo  $q_0 \leq q < q_1$  che si annulla in  $q_1$  dove presenta uno zero di molteplicità maggiore o uguale a due (vedi figura corrispondente a pagina 5). Per fissare le idee sia inoltre  $\dot{q}_0 > 0$ .

Prima di iniziare le considerazioni che consentiranno di dedurre il comportamento della  $q = q(t)$ , ricordiamo che  $q_1$  è uno zero di molteplicità  $s$  per la funzione  $f(q)$  se  $f(q) = (q - q_1)^s g(q)$  con  $g(q_1) \neq 0$ . Non è difficile verificare che se la  $f(q)$  presenta uno zero di ordine  $s$  in  $q = q_1$  allora le derivate  $f'(q), f''(q), \dots, f^{(s-1)}(q)$  calcolate in  $q = q_1$  si annullano, mentre  $f^{(s)}(q_1) \neq 0$ .

Il segno davanti ai radicali, per le ipotesi fatte su  $f(q)$ , nelle (3) e (5) deve essere positivo per  $q_0 \leq q < q_1$ . Osserviamo inoltre che la  $q$  non raggiunge mai il valore  $q_1$  perchè, essendo  $q_1$  uno zero di molteplicità maggiore o uguale a due, l'integrale

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{(q - q_1) \sqrt{(q - q_1)^{s-2} g(q)}}$$

diverge (perchè la funzione integranda diverge di ordine maggiore (o uguale) di uno per  $q \rightarrow q_1$ ). Quindi,  $t_1 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{(q - q_1) \sqrt{(q - q_1)^{s-2} g(q)}} \rightarrow \infty$ , (confronta con (3)). Per questo motivo si parla di moto a meta asintotica verso  $q_1$  (vedi figura corrispondente a pagina 5).

**Esercizio 1:** Dedurre l'andamento della funzione  $q = q(t)$  se la funzione  $f(q)$  è positiva per  $q_1 < q \leq q_0$ , presenta uno zero di molteplicità maggiore o uguale a due per  $q = q_1$  e se  $\dot{q}_0 < 0$ .

**Terzo caso:** Sia  $f(q)$  una funzione strettamente positiva nell'intervallo  $q_0 \leq q < q_1$  che si annulla in  $q_1$  dove presenta uno zero di molteplicità uno (vedi figura corrispondente a pagina 6). Per fissare le idee sia inoltre  $\dot{q}_0 > 0$ .

Il segno davanti ai radicali, per le ipotesi fatte su  $f(q)$ , nelle (3) e (5) deve essere positivo per  $q_0 \leq q < q_1$ . In questo caso, essendo  $q_1$  uno zero di molteplicità uno, l'integrale

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{(q - q_1)g(q)}}$$

converge (perchè la funzione integranda diverge di ordine minore di uno (precisamente  $\frac{1}{2}$ ) per  $q \rightarrow q_1$ ). Quindi il valore  $q_1$  verrà raggiunto in un tempo finito (confronta con (3))  $t_1 = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{(q - q_1)g(q)}}$ . Le ipotesi fatte sulla funzione  $f(q)$  implicano

$$f(q_1) = 0, \quad \text{e} \quad f'(q_1) < 0. \quad (8)$$

Infatti se fosse  $f'(q_1) = 0$  allora la  $f(q)$  avrebbe uno zero di molteplicità almeno due in  $q_1$  e questo contraddice le ipotesi; inoltre non può neppure essere  $f'(q_1) > 0$  perchè la  $f(q)$  è decrescente in un intorno sinistro di  $q_1$  (visto che passa dall'assumere valori strettamente positivi al valore zero). Se si deriva l'equazione (1) rispetto al tempo e si semplifica il fattore comune  $\dot{q}$ , si perviene all'equazione

$$2\ddot{q}(t) = f'(q). \quad (9)$$

La (9) valutata per  $t = t_1$  fornisce  $\ddot{q}(t_1) < 0$ , mentre direttamente da (1) si trae  $\dot{q}(t_1) = 0$ . Poichè la funzione  $q = q(t)$  è tale che la sua derivata prima si annulla per  $t = t_1$ , mentre la derivata seconda per  $t = t_1$  è minore di zero, essa presenta un punto di massimo per  $t = t_1$  (vedi figura corrispondente a pagina 6).

Resta da studiare **come prosegue il moto se  $t > t_1$** . Poichè la  $q = q(t)$  raggiunge un punto di massimo per  $t = t_1$  la  $q(t)$  decresce per  $t > t_1$  e quindi  $\dot{q} < 0$ . Come conseguenza il segno davanti al radicale nelle (3) e (5) dovrà essere negativo. Possono presentarsi diversi sottocasi. Prima di analizzare tali sottocasi, si svolga il seguente

**Esercizio 2:** Dedurre l'andamento della funzione  $q = q(t)$  se la funzione  $f(q)$  è positiva per  $q_1 < q \leq q_0$ , presenta uno zero di molteplicità uno per  $q = q_1$  e se  $\dot{q}_0 < 0$ .

**Sottocaso a:** Se per  $q < q_1$  la funzione  $f(q)$  rimane strettamente positiva (senza annullarsi mai), allora la  $q(t)$  è monotona decrescente (confronta con (7)). Vedi figura corrispondente a pagina 6.

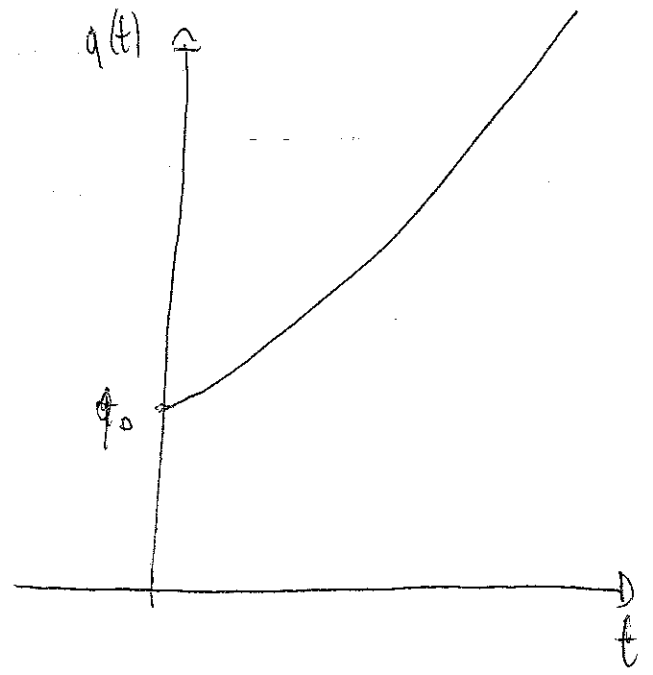
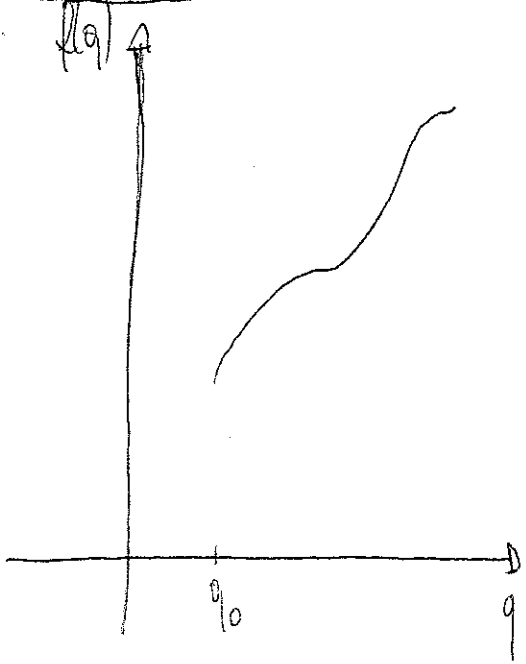
**Sottocaso b:** Supponiamo che per  $q < q_1$  la funzione  $f(q)$  possieda, per un certo valore  $q = q_2$ , uno zero di molteplicità maggiore o uguale a due e teniamo conto che  $\dot{q}_0 < 0$ . Osserviamo che poichè per  $q_0 \leq q < q_1$  si è supposto che  $f(q) > 0$ , allora deve necessariamente essere  $q_2 < q_0$ . Poichè per  $q_2 < q \leq q_0$ ,  $f(q) > 0$  e  $\dot{q}_0 < 0$ , usando... i risultati dell'esercizio 1 si trova che la  $q$  tende asintoticamente al valore  $q_2$ . Vedi figura corrispondente a pagina 6.

**Sottocaso c:** Supponiamo che per  $q < q_1$  la funzione  $f(q)$  possieda, per un certo valore  $q = q_2$ , uno zero di molteplicità uno e teniamo conto che  $\dot{q}_0 < 0$ . Ragionando come nel sottocaso b si trova che per  $q_2 < q \leq q_0$  si ha  $f(q) > 0$  e  $\dot{q}_0 < 0$ . Utilizzando l'analisi svolta nell'esercizio 2 si verifica che il valore  $q_2$  è raggiunto (partendo dalla posizione  $q_1$ ) in un tempo finito  $t_2 = -\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{(q-q_2)g(q)}}$  e si dimostra che, per il valore  $t = t_2$ , la funzione  $q = q(t)$  possiede un punto di minimo. Rimane da capire **cosa capita, per questo sottocaso, per  $t > t_2$** . La funzione  $q(t)$  avendo raggiunto un minimo per  $t = t_2$  diventa crescente e perciò  $\dot{q} > 0$  (cioè  $\dot{q}$  cambia nuovamente segno) e il segno davanti ai radicali nelle (3) e (5) sarà di nuovo positivo. Quindi dopo un intervallo di tempo dato da

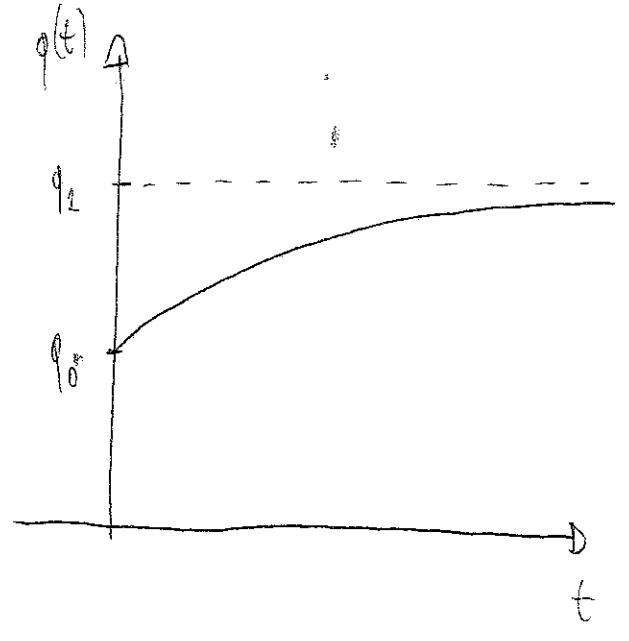
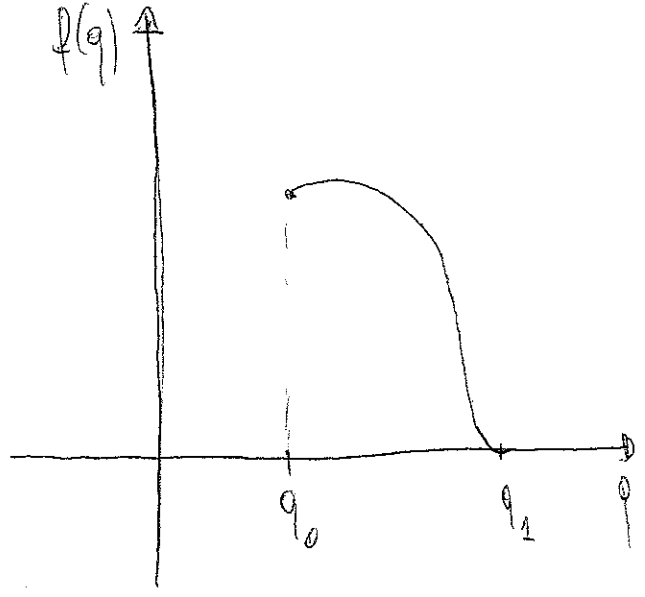
$$T = \int_{q_0}^{q_1} \frac{dr}{f(r)} - \int_{q_1}^{q_2} \frac{dr}{f(r)} + \int_{q_2}^{q_0} \frac{dr}{f(r)} = -2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dr}{f(r)} \quad (10)$$

la funzione riacquista il suo valore iniziale  $q_0$  e la sua derivata  $\dot{q}_0$  di nuovo acquista il valore  $\dot{q}_0 = \sqrt{f(q_0)}$ . Cioè, dopo l'intervallo di tempo  $T$ , la funzione riprende le stesse caratteristiche che aveva al tempo  $t = 0$ , e riprende lo stesso comportamento. Si tratta evidentemente di un moto periodico di periodo  $T$  (vedi figura corrispondente a pagina 6).

Primo caso

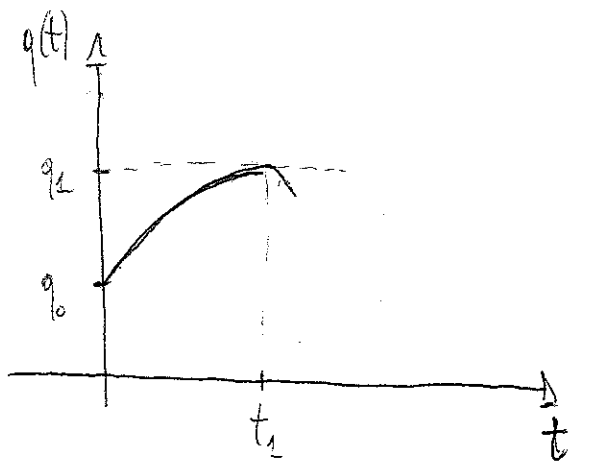
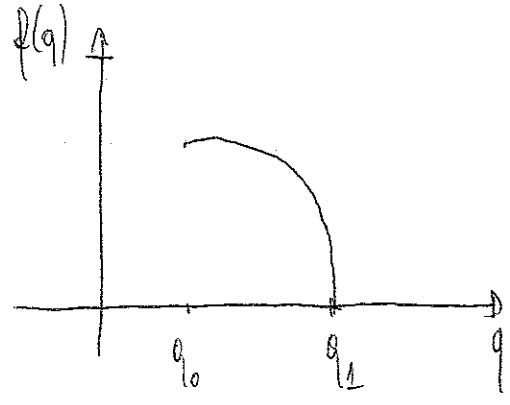


Secondo caso

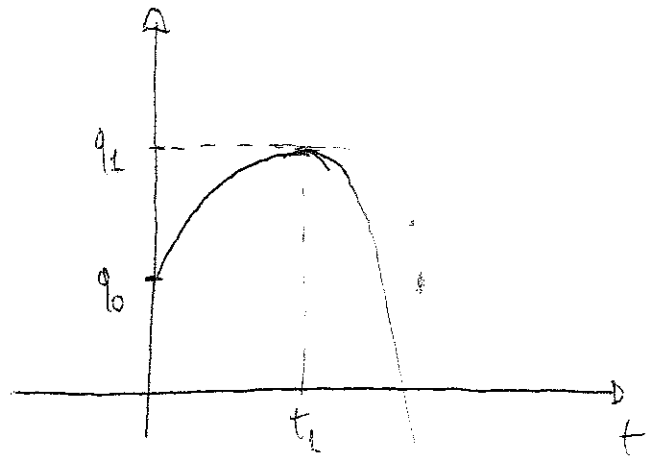
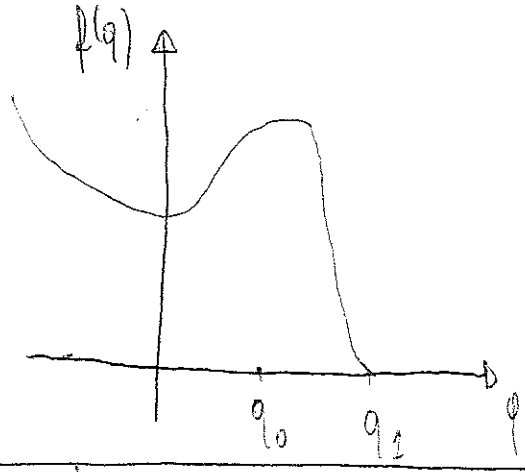


Nota e meta asintotica

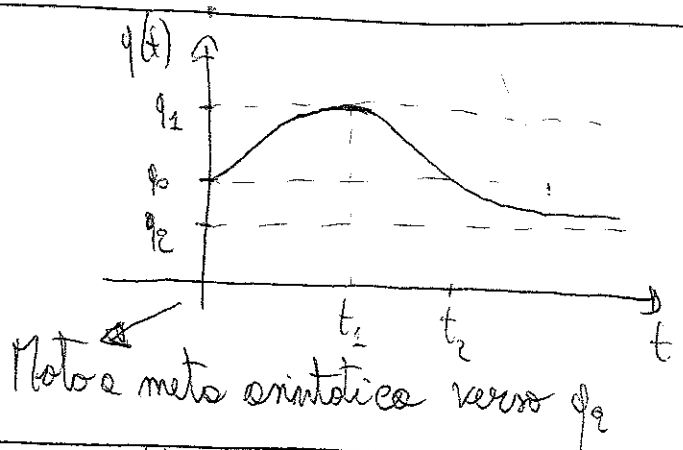
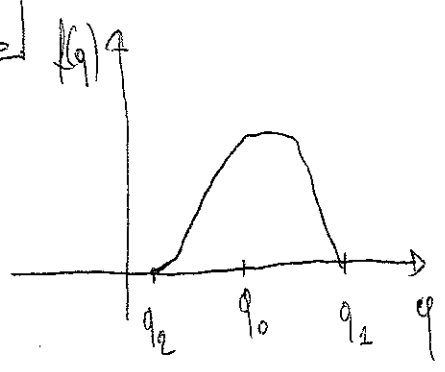
Terzo caso



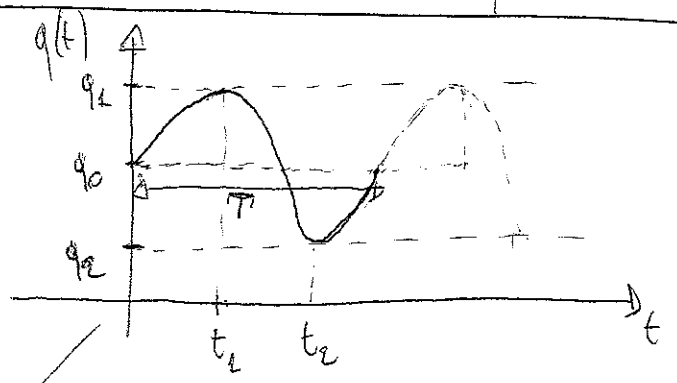
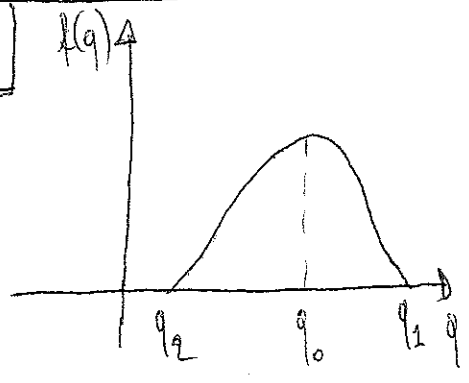
Sottocaso a.



Sottocaso b.



Sottocaso c.



Facciamo ora un esempio significativo in cui applichiamo quanto sviluppato nelle pagine precedenti. Consideriamo un sistema ad un solo grado di libertà: **il pendolo semplice**.

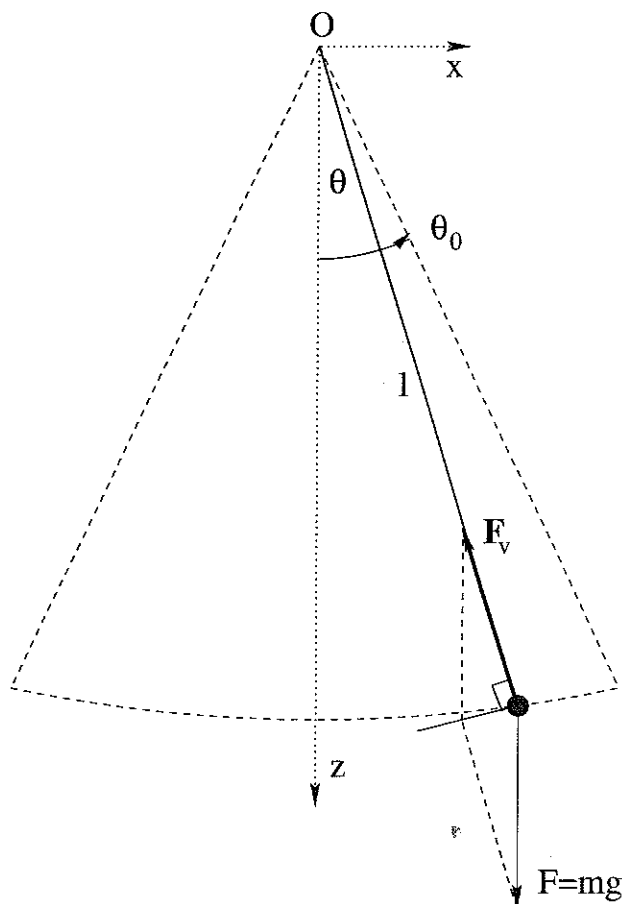


Figura 1: Il pendolo semplice.

Fissato nel piano verticale  $Oxz$  il riferimento come indicato in figura (1) (in particolare si osservi il verso dell'asse  $z$ ), il pendolo semplice è schematizzato con un punto materiale pesante di massa  $m$  vincolato a stare sulla circonferenza di centro l'origine e raggio  $l$ . Si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  formato dall'asse  $z$  con il raggio vettore  $OP$ . Sul punto  $P$  di coordinate  $P(l \sin \theta, 0, l \cos \theta)$  agisce solo la forza peso  $\vec{F} = m\vec{g}$  che, per come si è scelto il riferimento, è parallela e equiversa all'asse  $z$ . Quindi le espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono  $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$  e

$V = -mgl \cos \theta$  (riflettere un pò sul fatto che l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante!). Possiamo perciò facilmente scrivere l'equazione della Lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$  e, conseguentemente, l'unica equazione di moto è:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (11)$$

Moltiplicando l'equazione (11) per  $\dot{\theta}$  si perviene subito all'equazione (integrale primo dell'energia)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \right) = 0$$

da cui si ricava

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{cost.} = E. \quad (12)$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia. Si osservi che l'energia totale del sistema è legata ai dati iniziali del problema tramite la relazione  $E = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_0^2 - mgl \cos \theta_0$ . L'equazione (12) può essere riscritta come

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \left( \cos \theta + \frac{E}{mgl} \right), \quad (13)$$

che ha la stessa forma della (1) con  $f(\theta) = \frac{2g}{l} \left( \cos \theta + \frac{E}{mgl} \right)$ . Possiamo quindi applicare i risultati stabiliti in precedenza.

Prima di tutto deve essere  $f(\theta) \geq 0$  che implica  $E \geq -mgl$  (se fosse  $E < -mgl$  il moto è impossibile). Inoltre la  $f(\theta)$  è periodica di periodo  $2\pi$  e perciò studiamo il moto del pendolo quando  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Si presentano i seguenti casi:

- a. **Sia  $E > mgl$ .** In tal caso la funzione  $f(\theta)$  rimane strettamente positiva per ogni  $\theta \in -\pi \leq \theta \leq \pi$  e quindi la funzione  $\theta(t)$  risulta monotona crescente se  $\dot{\theta} > 0$ , monotona decrescente se  $\dot{\theta} < 0$ .
- b. **Sia  $E = mgl$ .** In tal caso si ha  $f(\theta) = \frac{2g}{l}(\cos \theta + 1)$ . Per  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  la  $f(\theta)$  si annulla per  $\theta = \pm\pi$  e tali punti sono zeri di molteplicità algebrica due perchè è immediato verificare che  $f'(\pm\pi) = 0$  e  $f''(\pm\pi) = \mp \frac{2g}{l}$ . Quindi se  $\theta_0 \neq \pm\pi$  il moto è a meta asintotica verso  $\pi$  o  $-\pi$  a seconda che sia, rispettivamente,  $\dot{\theta}_0 > 0$  o  $\dot{\theta}_0 < 0$ . Se inizialmente è  $\theta_0 = \pm\pi$  allora, essendo  $\dot{\theta} = 0$  con  $f(\pm\pi) = f'(\pm\pi) = 0$  deve essere  $\theta = \pm\pi$  (equilibrio instabile).



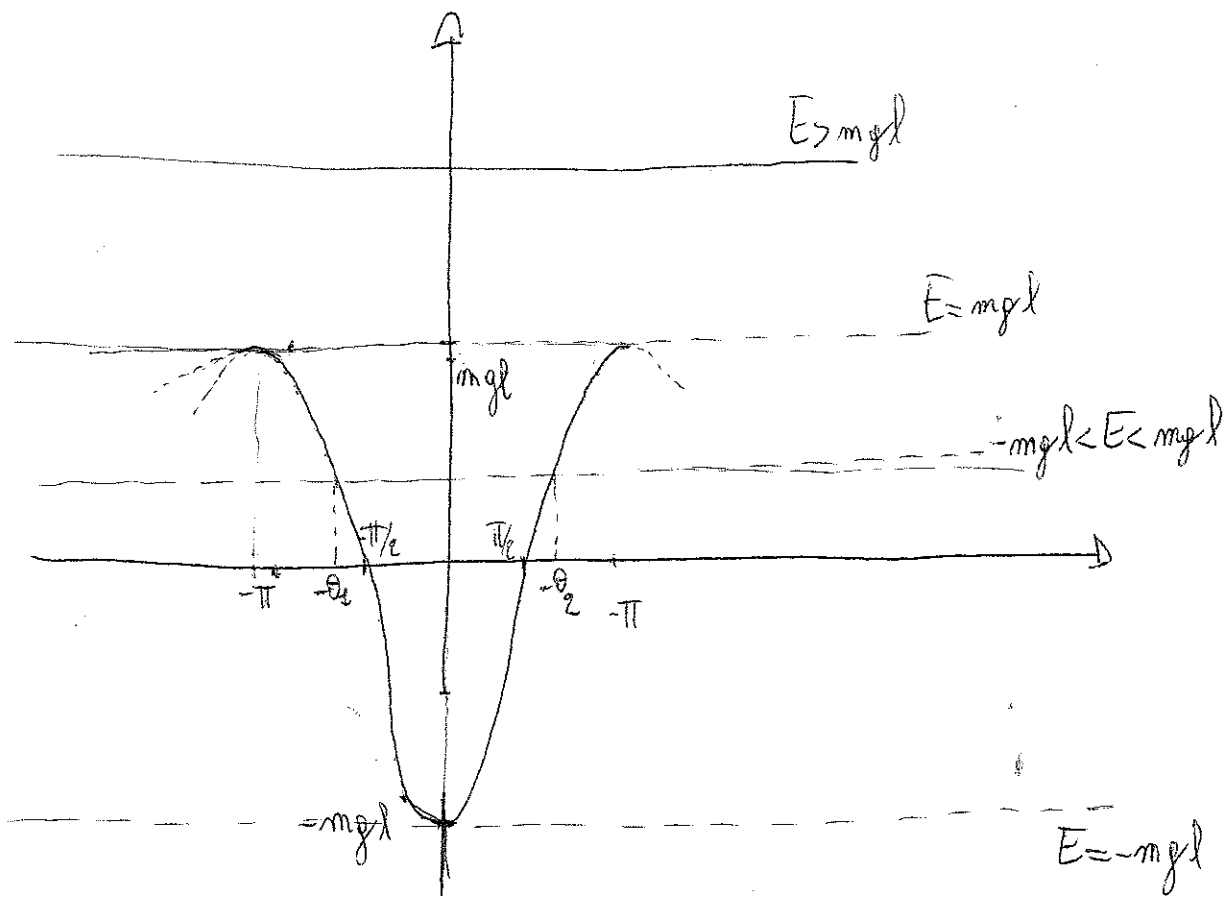
- c. **Sia**  $-mgl < E < mgl$ . In questo caso la funzione  $f(\theta)$  si annulla, in  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , per  $\theta = \pm\theta_1$  essendo  $\theta_1 = \arccos(-\frac{E}{mgl})$  (si noti che  $\theta_1$  risulta essere sempre reale). E' inoltre facile verificare che la  $f(\theta)$  rimane positiva per  $-\theta_1 < \theta < \theta_1$  e che  $f'(\pm\theta_1) \neq 0$  (quindi  $\pm\theta_1$  sono zeri semplici consecutivi). Pertanto il moto è periodico fra i valori estremi  $-\theta_1$  e  $\theta_1$ .
- d. **Sia**  $E = -mgl$ . In questo caso si ottiene la funzione  $f(\theta) = \frac{2g}{l}(\cos\theta - 1)$  che è sempre negativa (e quindi il moto è impossibile) ad eccezione del caso in cui  $\theta = 0$ . Quando  $\theta = 0$  il punto materiale tende a stare in quella posizione (equilibrio stabile).

Essenzialmente, la discussione appena condotta può essere portata a termine in modo più veloce per via grafica scrivendo l'equazione (12) come

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2} \sqrt{E - V}}, \quad (14)$$

con  $V = -mgl \cos\theta$ . Infatti questa equazione è del tipo (5). Osserviamo che, poichè della (14) interessano solo i valori reali, dovrà essere  $E > V$  e gli zeri della funzione  $f(\theta)$  della precedente discussione corrispondono ai cosiddetti *istanti d'arresto*, ovvero i punti in cui  $E = V$ . Inoltre, gli zeri con molteplicità almeno due vanno selezionati fra i punti che annullano la derivata prima di  $V$  (cioè sono i punti in cui  $E = V$  e  $V' = 0$ ). Tenendo conto di questo fatto, si ritrovano i quattro casi sopra descritti tracciando il grafico dell'energia potenziale e facendo variare l'energia (costante)  $E$  in modo che questa assuma sempre valori maggiori o uguali a quelli della  $V$  (si veda figura sotto).

# Discussione Weierstrass per il pendolo semplice



$E > mgl$  moto rotatorio

$E = mgl$  moto e moto asintotica se  $\theta_0 \neq \pm \pi$  oppure eq. instabile se  $\theta_0 = \pm \pi$

$-mgl < E < mgl$  moto periodica

$E = -mgl$  eq. stabile

$E < -mgl$  moto impossibile