Capitolo VI

Vincoli

In questo capitolo vengono introdotti alcuni dei concetti più importanti per lo sviluppo della Meccanica, e cioè quelli di *vincolo*, *coordinate lagrangiane* e *grado di libertà*.

1 Vincoli e loro classificazione

Nello studio della Meccanica molto spesso ci si imbatte in sistemi materiali (continui e discreti) vincolati, cioè il cui movimento è ostacolato. Per vincolo si intende ogni dispositivo che limita la libertà di movimento dei punti di un sistema.

Ci soffermiamo sulla rappresentazione analitica dei vincoli, cioè sulla loro descrizione mediante opportune equazioni e/o disequazioni. Infatti una prima classificazione dei vincoli viene fatta tenendo conto della natura delle equazioni che li rappresentano.

Per prima cosa occorre distinguere fra vincoli *di posizione* e vincoli di *mobilità*. I vincoli sono detti di posizione se le equazioni che li rappresentano coinvolgono le coordinate dei punti del sistema ma non le loro velocità. Invece si ha un vincolo di mobilità se le equazioni del vincolo tengono conto sia della posizione dei punti che delle loro velocità.

Soffermiamoci inizialmente sui vincoli di posizione. Essi possono ulteriormente essere classificati in:

a. vincoli bilaterali e vincoli unilaterali

b. vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo

c. vincoli interni e vincoli esterni

In particolare un vincolo viene detto di posizione e bilaterale se esso è rappresentato da un'equazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \ldots, P_N; t) = 0, \tag{VI.1}$$

essendo f una funzione degli N punti del sistema ed, eventualmente, del tempo t. Discutiamo alcuni semplici esempi di tale tipo di vincolo.

1. Punto materiale P vincolato a stare su una superficie. Supponiamo che l'equazione della superficie su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$f(x, y, z; t) = 0, \tag{VI.2}$$

dove (x, y, z) denotano le coordinate del punto P, mentre la dipendenza dal tempo t evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.2) rappresenta un vincolo del tipo (VI.1) e quindi di posizione e bilaterale. Per esempio, il punto $P(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ è vincolato a stare sulla superficie sferica di centro l'origine e raggio unitario, in altre parole il vincolo è rappresentato dall'equazione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Punto materiale P vincolato a stare su una curva. Supponiamo che l'equazione della curva su cui il punto è costretto a restare costantemente in contatto sia

$$\begin{cases} f(x, y, z; t) = 0, \\ g(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \tag{VI.3}$$

dove (x, y, z) denotano le coordinate del punto P. In tal caso, ciascuna delle due equazioni (indipendenti) rappresenta un vincolo di posizione bilaterale. Per esempio, il punto $P(x, \sqrt{1 - y^2}, x0)$ è vincolato a stare sulla circonferenza di centro l'origine e raggio unitario del piano xy. Tale vincolo è di posizione e bilaterale perchè le coordinate del punto P soddisfano le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. Sistema rigido (vincolo di rigidità). Come già discusso in un precedente capitolo, un sistema (continuo o discreto) si dice rigido se la distanza fra due punti qualunque del sistema è costante al trascorrere del tempo. Per semplicità, supponiamo che il sistema sia formato da un numero finito di punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$ (con $i = 1, 2, \ldots, N$). Il vincolo di rigidità sarà allora espresso mediante le equazioni (ciascuna del tipo (VI.1))

$$d(P_i, P_j) = cost. \quad \text{per } i, j = 1, 2, \ldots, N, \text{ e } i \neq j, \tag{VI.4}$$

dove con $d(P_i, P_j)$ si è denotata la distanza fra i punti P_i e P_j. Se ai punti P_i si aggiunge un altro punto P, questo soddisfa il vincolo di rigidità se $d(P, P_i) = cost.$ con $i = 1, 2, \ldots, N$. In particolare, questo significa aggiungere N vincoli a quelli già presenti.

Un vincolo viene detto di posizione e unilaterale se esso è rappresentato da una disequazione del seguente tipo:

$$f(P_1, P_2, \ldots, P_N; t) \geq 0. \tag{VI.5}$$

Le configurazioni per cui la (VI.5) è soddisfatta come uguaglianza si dicono di *confine*, mentre quelle per cui la (VI.5) è verificata come disuguaglianza sono dette *ordinarie*. Consideriamo alcuni esempi di tale tipo di vincolo.

4. Punto materiale P appoggiato a una superficie. Supponiamo che un punto P sia costretto a rimanere sempre dalla stessa parte di una superficie senza poterla attraversare. Si dice allora che tale punto è appoggiato alla superficie. Se l'equazione della superficie su cui il punto è appoggiato, è $f(x, y, z; t) = 0$, allora le coordinate del punto $P(x_P, y_P, z_P)$ dovranno soddisfare la relazione

$$f(x_P, y_P, z_P; t) \geq 0, \tag{VI.6}$$

dove la dipendenza dal tempo t evidenzia che la superficie è mobile nel tempo. Evidentemente, l'equazione (VI.6) rappresenta un vincolo del tipo (VI.5) e quindi di posizione e unilaterale. Un esempio di punto appoggiato ad una superficie è rappresentato da un punto costretto a restare all'esterno della superfice sferica. In tal caso le sue coordinate x, y, z dovranno soddisfare la disequazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0.$$

In particolare, le configurazioni di confine sono quelle in cui le coordinate del punto P soddisfano all'equazione della sfera, mentre sono ordinarie le posizioni in cui la distanza di tale punto dall'origine è maggiore di uno.

Chiariamo ora la distinzione fra vincoli fissi e vincoli dipendenti dal tempo. Un vincolo si dice fisso se il tempo non compare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Tutti gli esempi finora analizzati sono vincoli fissi. Un vincolo è invece dipendente dal tempo se il tempo appare esplicitamente nelle equazioni o disequazioni che lo rappresentano. Un esempio di vincolo dipendente dal tempo è quello di un punto P vincolato ad una retta r che ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse normale e incidente tale retta. Se la rotazione è uniforme allora tale vincolo si esprime nella forma

$$\theta = \pm\omega t + \theta_0$$

a seconda che tale rotazione sia destra o sinistra.

Infine un vincolo che presuppone l'interazione fra elementi facenti parti del sistema è detto interno. Un tipico esempio di sistema soggetto a vincolo interno è costituito da un corpo rigido. Infatti, si è già avuto modo di osservare che la velocità di ogni punto di un sistema rigido è nota una volta che siano assegnati i due vettori caratteristici ω e $\vec{v}_O$ (si veda il capitolo dedicato ai corpi rigidi per maggiori dettagli) e questo determina che le sue parti non possono muoversi indipendentemente l'una dall'altra. Sono vincoli esterni invece quelli che operano fra una parte fissa (il cosiddetto telaio) e un elemento del sistema.

2 Coordinate lagrangiane e sistemi olonomi

Consideriamo un sistema materiale vincolato. In un fissato istante t ogni punto del sistema occupa una determinata posizione, compatibilmente a quelle permesse dai vincoli. Quindi l'insieme delle posizioni occupate all'istante t dai punti del sistema individua la cosiddetta *configurazione del sistema all'istante considerato* t. In tutti i problemi da affrontare in questo corso, sarà sempre possibile descrivere la configurazione del sistema attraverso un numero finito di parametri indipendenti. Illustriamo ora quest'ultima affermazione riconsiderando alcuni degli esempi discussi nella sezione precedente e considerandone qualche altro.

Un punto P vincolato a stare su una curva, è individuato da un solo parametro: si potrebbe scegliere come parametro l'ascissa curvilinea s di P su tale curva. Un punto vincolato a stare su una superficie è individuato da due parametri indipendenti che potremo indicare con u, v essendo tali parametri tali che $\vec{x}(u, v)$ fornisca una parametrizzazione della superficie. La configurazione di un corpo rigido, libero da vincoli esterni, è individuata da sei parametri indipendenti: si potrebbero scegliere per tali parametri le tre coordinate di un punto del corpo e i tre angoli di Eulero. Se invece sul corpo rigido agiscono dei vincoli esterni in modo che esso abbia un punto fisso, allora per determinarne la posizione bastano i tre angoli di Eulero. Come ulteriore esempio consideriamo un corpo rigido con un asse fisso. In tal caso la configurazione del sistema è, in ogni istante, individuata da un solo parametro: basta infatti assegnare l'angolo fra due piani, uno di questi fisso e l'altro solidale al corpo, contenenti l'asse fisso.

Si chiama *coordinata lagrangiana di un sistema materiale vincolato* ciascuno dei parametri indipendenti necessari a individuare la configurazione del sistema. A seconda del particolare problema studiato occorre scegliere i parametri lagrangiani che meglio consentono di affrontarne lo studio. In generale, tali coordinate si denotano con $q_1, q_2, \dots, q_n$, essendo n il numero di coordinate lagrangiane necessarie a specificare la configurazione del sistema. Negli esempi prima considerati si potrebbero fare le seguenti scelte (che, ribadiamo, in contesti più specifici potrebbero non essere le più convenienti).

a. *Punto vincolato a stare su una curva*: l'ascissa curvilinea può scegliersi come unica coordinata lagrangiana.

b. *Sistema rigido senza vincoli esterni*: come coordinate lagrangiane possono adottarsi le tre coordinate x, y, z di un punto P del sistema e i tre angoli di Eulero θ, ϕ, ψ.

c. *Corpo rigido con un asse fisso*: come unica coordinata lagrangiana si può scegliere l'angolo θ formato fra un piano fisso contenente l'asse e un piano solidale al corpo e passante per l'asse.

Possiamo introdurre la seguente definizione: *Un sistema si dice olonomo se è soggetto solo a vincoli di posizione e bilaterali, cioè del tipo* (VI.1). Nei sistemi olonomi la posizione di ogni punto P del sistema dipende dalle n coordinate lagrangiane e, eventualmente, dal tempo. In formule si ha

$$P = P(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \tag{VI.7}$$

o, equivalentemente, le (VI.8) possono scriversi, scalarmente, come

$$x = x(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \tag{VI.8a}$$
$$y = y(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \tag{VI.8b}$$
$$z = z(q_1, q_2, \ldots, q_n; t). \tag{VI.8c}$$

Come esempio, potremo considerare il *bipendolo*. Tale dispositivo è costituito da

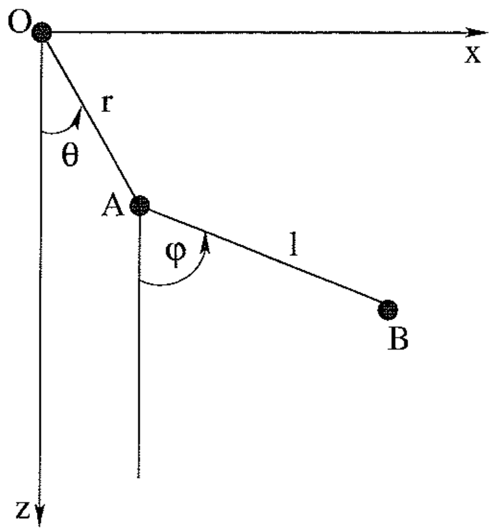

Figura VI.1: Bipendolo.

un punto materiale A vincolato a muoversi sulla circonferenza di centro l'origine e raggio r e da un altro punto B soggetto al solo vincolo di rigidità rispetto al punto A (cioè la distanza fra A e B è invariabile e supponiamo sia uguale a l.) Conviene scegliere come parametri lagrangiani gli angoli θ e ϕ indicati in figura (si osservi anche il verso dell'asse z!). In tal caso, si ha

$$\begin{cases} x = r\sin\theta + l\sin\phi, \\ y = 0, \\ z = r\cos\theta + l\cos\phi, \end{cases}$$

e quindi le coordinate di B sono espresse mediante equazioni del tipo (VI.8).

Si osserva subito che, in base alla definizione, per i sistemi olonomi gli incrementi che le n coordinate lagrangiane possono subire sono del tutto arbitrari sia in grandezza che in segno. Se nella definizione di sistema olonomo non si fosse richiesto che ogni vincolo fosse bilaterale, allora questo non sarebbe più vero: per esempio, nel caso di un punto appoggiato su un piano si avrebbe qualche limitazione del tipo $dq_r \geq 0$. Tenendo conto di questa osservazione possiamo introdurre i gradi di libertà nel seguente modo:

> *Si definisce numero di gradi di libertà di un sistema materiale il numero di incrementi arbitrari indipendenti che le coordinate lagrangiane possono subire compatibilmente con i vincoli.* In particolare, per un sistema olonomo il numero di gradi di libertà coincide sempre con il numero di coordinate lagrangiane.

3 Cenni sui sistemi anolonomi

Sebbene in questo corso tratteremo quasi esclusivamente il caso di vincoli di posizione, per completezza introduciamo anche i vincoli di mobilità, cioè quei vincoli tali che la loro rappresentazione analitica implica la dipendenza dalle velocità dei punti del sistema, oltre che dalla posizione occupata da questi punti. Più precisamente possiamo dare la seguente definizione: Un vincolo si dice di *mobilità* e bilaterale se si può rappresentare con un'equazione del seguente tipo:

$$\sum_{h=1}^{N} [a_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{z}_h] \\ + f(P_1, \dots P_N; t) = 0, \tag{VI.9}$$

in modo che non esista una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \tag{VI.10a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f, \tag{VI.10b}$$

per $h = 1, 2, \ldots N$. Quest'ultima richiesta deve sempre essere soddisfatta se il vincolo è di mobilità. Infatti, se così non fosse, tenendo conto della (VI.9) si avrebbe:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{h=1}^{N} [a_h \dot{x}_h + b_h \dot{y}_h + c_h \dot{z}_h] + f = 0$$

da cui si ottiene subito $F(P_1, P_2, \ldots, P_N; t) = cost.$ e quindi il vincolo sarebbe di posizione!

I vincoli di posizione appaiono quasi sempre quando si studiano problemi di rotolamento. Nei seguenti due esempi mostriamo come la condizione di non integrabilità della funzione F assuma un carattere decisivo. Come primo esempio consideriamo un disco circolare vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea. Assumiamo che la guida rettilinea coincide con l'asse x. Poichè il disco

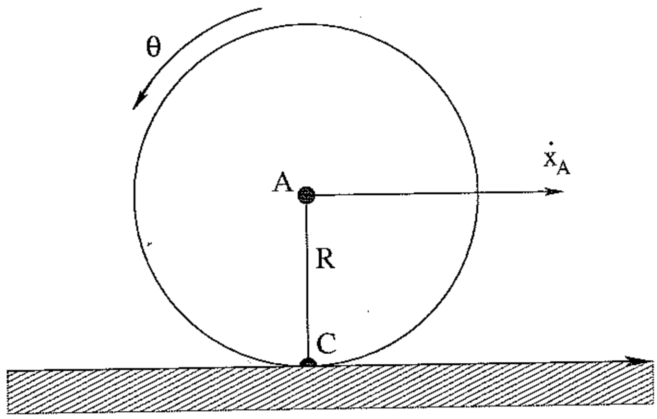

Figura VI.2: Disco circolare vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea.

rotola senza strisciare, ad ogni istante l'unico punto C di contatto fra disco e guida avrà velocità nulla. Se con A indichiamo il centro del disco e con R il suo raggio, l'applicazione della formula fondamentale della cinematica a questi due punti fornisce la seguente equazione

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A)\,,$$

ed essendo nulla la velocità del punto di contatto si ha

$$\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) = \vec{0}. \qquad \text{(VI.11)}$$

Considerando la proiezione di tale equazione lungo l'asse x e denotando con $\dot{\theta}$ la velocità angolare del disco, si trova la rappresentazione analitica del vincolo

$$\dot{x}_A + R\dot{\theta} = 0. \qquad \text{(VI.12)}$$

Questa equazione rappresenta solo apparentemente un vincolo di mobilità, in quanto la (VI.12) può essere integrata conducendo alla seguente equazione

$$x_A + R\theta = cost. \, . \tag{VI.13}$$

In definitiva, il vincolo cui deve soddisfare un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea è di tipo posizionale. Come secondo esempio consideriamo una sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare su un piano. Anche in questo caso cerchiamo di rappresentare analiticamente il vincolo. A tal fine, prendiamo come piano fisso su cui la sfera rotola, il piano di equazione $\zeta = 0$, e consideriamo il riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$ con origine Ω su tale piano. Consideriamo poi il riferimento mobile $Oxyz$ solidale alla sfera (di raggio R) e avente origine nel centro della sfera stessa e supponiamo che gli assi ζ e z si trovino dalla stessa parte del piano in cui giace la sfera Ora introduciamo le coordinate

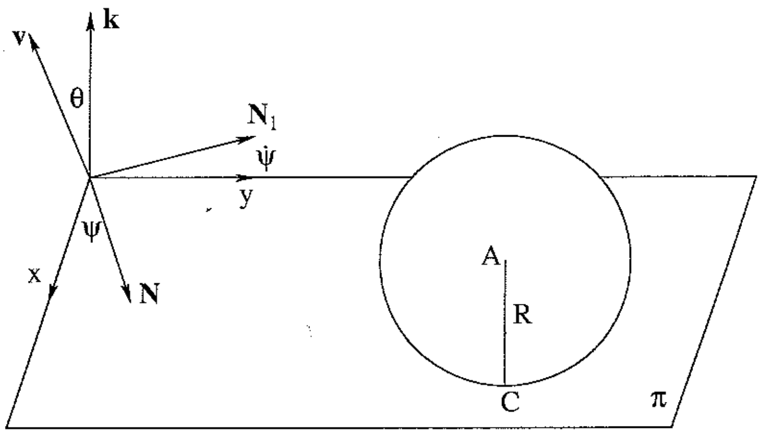

Figura VI.3: Sfera rigida vincolata a rotolare senza strisciare sul piano π.

lagrangiane che, ad ogni istante t, consentono di individuare in modo univoco la posizione della sfera. Tale posizione sarà completamente conosciuta qualora sia nota la posizione del centro della sfera $O(\alpha, \beta, R)$ rispetto alla terna fissa (o equivalentemente del suo unico punto di contatto C) e sia specificato il suo orientamento rispetto alla terna fissa. Tale orientamento è individuato tramite gli angoli di Eulero θ, ϕ, ψ. In definitiva, servono cinque coordinate lagrangiane $(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$. Occorre osservare che ad ogni sistema di valori di questi parametri corrisponde un'unica posizione della sfera a contatto con il piano. Inoltre, se le coordinate lagrangiane sono espresse da cinque funzioni del tempo, si ottengono le equazioni del moto della sfera costantemente a contatto con il piano di equazione $\zeta = 0$. Per ottenere un moto di puro rotolamento occorre inoltre che la velocità dell'unico punto di contatto C della sfera con il piano sia nulla. Tenendo conto di questa informazione e applicando la formula fondamentale della cinematica ai punti C e O, si perviene alla seguente

$$\vec{v}_O = (C - O) \wedge \vec{\omega}, \tag{VI.14}$$

essendo $\vec{\omega}$ la velocità angolare della sfera. Si verifica subito che sia $\vec{\omega}$ che $\vec{v}_O$ sono paralleli al piano fisso ($\vec{v}_O$ perchè è la velocità del centro della sfera che si muove parallelamente al piano, $\vec{\omega}$ in quanto perpendicolare al vettore $C - O$) Proiettando, la (VI.14) lungo gli assi ξ, η, ζ si trova (indicando con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori di tali assi e con ω_1 e ω_2 le componenti della velocità angolare rispetto a tali assi)

$$\dot{\alpha}\vec{e} + \dot{\beta}\vec{f} = R\left(-\omega_1\vec{f} + \omega_2\vec{g}\right). \tag{VI.15}$$

Ricordando le equazioni (IV.54) e (IV.60), si trovano le espressioni di ω_1 e ω_2 in funzione degli angoli di Eulero

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta, \\ \omega_2 = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta. \end{cases}$$

Utilizzando queste ultime e le (VI.15), si trova la rappresentazione analitica del vincolo di puro rotolamento

$$\dot{\alpha} = R\left(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta\right), \tag{VI.16a}$$

$$\dot{\beta} = R\left(\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta\right). \tag{VI.16b}$$

Si può dimostrare che queste relazioni non sono integrabili, nel senso che non esiste una funzione $F(\alpha, \beta, \theta, \phi, \psi)$ tale che, differenziando questa equazione rispetto al tempo e tenendo conto delle (VI.16), si arriva a delle identità. Tralasciamo la dimostrazione di questo fatto.

Anche i vincoli di mobilità possono essere classificati come unilaterali, fissi o dipendenti dal tempo. Più precisamente un vincolo di mobilità è unilaterale se si può rappresentare con una disequazione del seguente tipo:

$$\sum_{h=1}^{N} \left[a_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{x}_h + b_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{y}_h + c_h(P_1, P_2, \dots P_N; t)\dot{z}_h\right] + f(P_1, \dots P_N; t) \geq 0, \tag{VI.17}$$

in modo però che non esista una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_N; t)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = a_h, \quad \frac{\partial F}{\partial y_h} = b_h, \tag{VI.18a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_h} = c_h, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = f. \tag{VI.18b}$$

Un vincolo di mobilità è detto fisso se nella loro espressione analitica (VI.9) il tempo non figura esplicitamente, mentre è detto dipendente dal tempo se nella (VI.9) il tempo appare esplicitamente.

Possiamo dare la seguente definizione: Un sistema è detto *anolonomo* se è soggetto a soli vincoli bilaterali, di cui almeno uno di mobilità.

Si è sottolineato, nella precedente sezione, che per un sistema olonomo il numero di libertà è esattamente uguale al numero di coordinate lagrangiane. Questa affermazione non rimane vera se riferita a sistemi anolonomi. Più precisamente, in un sistema anolonomo il numero di gradi di libertà è uguale al numero di gradi di coordinate lagrangiane diminuito del numero di vincoli di mobilità (o, il che è lo stesso, del numero di relazioni non integrabili). Infatti, in tali sistemi, gli incrementi di tali coordinate non sono indipendenti fra loro ma legati dalle relazioni lineari che si ottengono moltiplicando per dt i vincoli di mobilità del tipo (VI.9). Per esempio, nel caso prima considerato della sfera che rotola senza strisciare sopra un piano, si è visto che per determinare ad ogni istante la configurazione della sfera occorrono cinque coordinate lagrangiane $\alpha, \beta, \theta, \psi, \phi$. Gli incrementi di tali coordinate sono legati dalle seguenti relazioni lineari (ottenute moltiplicando per dt le (VI.16)), si ottiene

$$d\alpha - R\sin\psi d\theta + R\cos\psi\sin\theta d\phi = 0, \qquad \text{(VI.19a)}$$

$$d\beta + R\cos\psi d\theta + R\sin\psi\sin\theta d\phi = 0. \qquad \text{(VI.19b)}$$

Quindi solo tre dei cinque incrementi delle coordinate lagrangiane possono essere attribuiti ad arbitrio mentre gli altri due sono determinati dalle (VI.19). Perciò il numero dei gradi dei libertà del sistema è tre. (Si osservi che questo è in perfetto acccordo con il fatto che ad ogni istante l'atto di moto è una rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto C.)

4 Spostamenti effettivi e spostamenti virtuali