1 Spazi vettoriali

Siano dati un insieme V ed un corpo K. Si dice che V é uno spazio vettoriale sul corpo K se sono definite due operazioni, una di somma tra elementi di V ed una di prodotto tra un elemento di K ed uno di V, entrambe a valori in V, tali che le seguenti proprietá siano soddisfatte

$$\begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} & \text{(Proprietá commutativa)} \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) & \text{(Proprietá associativa)} \\ \exists\vec{0}\epsilon V:\vec{0}+\vec{u}=\vec{u} & \text{(Esistenza dello zero)} \\ \forall\vec{u}\epsilon V,\exists\vec{u}'\epsilon V:\vec{u}+\vec{u}'=\vec{0} & \text{(Esistenza dell' opposto).} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 1\vec{u}=\vec{u} & \text{(Unitá di } K \text{ per elemento di } V\text{)} \\ a(b\vec{u})=(ab)\vec{u} & \text{(Proprietá associativa del prodotto esterno)} \\ (a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u} & \text{(Proprietá distributiva).} \end{cases} \tag{1.2}$$

Queste proprietà valgono ovviamente $\forall\vec{u},\vec{v}$ appartenenti a V ed a,b appartenenti a K; inoltre 1 é l' unitá di K. Casi significativi sono quelli con K corpo dei numeri complessi e con K corpo dei numeri reali. L' elemento $\vec{u}'$ di cui sopra viene anche indicato con $-\vec{u}$. La somma $\vec{u}+(-\vec{v})$ viene anche indicata con $\vec{u}-\vec{v}$ e chiamata differenza di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$. Gli elementi di V vengono chiamati vettori. Il vettore $\vec{u}$ si dice parallelo al vettore $\vec{v}$ se esiste $m\epsilon K$ tale che $\vec{u}=m\vec{v}$; se K è il corpo dei numeri reali, i due vettori si dicono paralleli e concordi se $m\geq 0$, paralleli e discordi se $m\leq 0$.

Le seguenti proprietà sono conseguenza delle precedenti:

- Lo zero di V e l' opposto di $\vec{u}$ sono unici,
- $0\vec{u}=\vec{0}$, $a\vec{0}=\vec{0}$, $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$, $a(-\vec{u})=-a\vec{u}$,
- $a\vec{u}=0\Rightarrow a=0$, oppure $\vec{u}=\vec{0}$,

dove 0 è lo zero di K.

Un esempio di spazio vettoriale è l' insieme $\Re^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali

$\vec{u}=(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ con somma e prodotto definiti da

$\vec{u}+\vec{v}=(u^1,u^2,\cdots,u^n)+(v^1,v^2,\cdots,v^n)=(u^1+v^1,u^2+v^2,\cdots,u^n+v^n)$

$a\vec{u}=a(u^1,u^2,\cdots,u^n)=(au^1,au^2,\cdots,au^n)$.

Gli n vettori $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\cdots$, $\vec{u_n}$, si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare può dare risultato nullo solo se sono nulli i coefficienti, cioè

$$a^1\vec{u_1} + a^2\vec{u_2} + \cdots + a^n\vec{u_n} = 0 \Rightarrow a^1 = a^2 = \cdots = a^n = 0;$$

in caso contrario si dicono linearmente dipendenti. Se esistono n vettori linearmente indipendenti e, comunque ne prendiamo $n+1$, questi risultano linearmente dipendenti, allora si dice che lo spazio vettoriale V ha dimensione finita n. In tal caso, n vettori linearmente indipendenti si chiamano anche base di V; si ha che n vettori costituiscono una base se e solo se ogni vettore si esprime in uno ed un sol modo come loro combinazione lineare. Un esempio di spazio vettoriale con dimensione n è $\Re^n$ ed una sua base é data dai vettori $\vec{e_i}$, la cui unica componente non nulla vale 1 ed é la i-ma.

1.1 Cambiamenti di base.

Siano $\vec{e_i}$ ed $\vec{e_{i'}}$ due basi di uno spazio vettoriale. Ovviamente, $\vec{e_i}$ si potrá esprimere come combinazione lineare degli elementi dell' altra base e viceversa, cioé

$$\vec{e_i} = A_i{}^{i'}\vec{e_{i'}} \quad , \quad \vec{e_{i'}} = A_{i'}{}^{i}\vec{e_i} \, , \tag{1.3}$$

dove si adottata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti, cioé che é sottintesa la sommatoria rispetto a tali indici. Un indice ripetuto dicesi muto e nulla cambia se lo sostituisce con un altro indice, purché questo non compaia giá nell' espressione che si sta considerando; gli indici non muti sono anche detti "liberi". $A_i{}^{i'}$ viene anche chiamata "matrice del cambiamento di base". Sostituendo $(1.3)_2$ nell' eq. $(1.3)_1$ ed uguagliando a $\delta_i^j\vec{e_j}$, si trova che le matrici comparenti in $(1.3)_1$ e $(1.3)_2$ sono l' una l' inversa dell' altra. Per ogni vettore $\vec{v}$, si ha

$$\vec{v} = v^i\vec{e_i} \, , \tag{1.4}$$

ed i coefficienti v^i vengono chiamati "componenti di $\vec{v}$ nella base $\vec{e_i}$". Come cambiano le componenti al variare della base? Sostituendo la $(1.3)_1$ nella (1.4), ed uguagliando a $v^{i'}\vec{e_{i'}}$, si trova

$$v^{i'} = A_i{}^{i'}v^i \, . \tag{1.5}$$

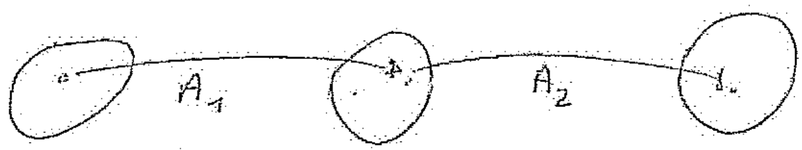
Si noti che la matrice con cui cambiano le componenti $v^{i'}$ non é la stessa di $(1.3)_2$ con cui cambia la base $\vec{e_{i'}}$; invece é la sua inversa, quella che compare in $(1.3)_1$. Per questo motivo l' eq. (1.5) viene chiamata "Legge di Controvarianza" e le suddette componenti v^i vengono dette "componenti controvarianti di

$\vec{v}$. Si puó anche dire che una n-upla di numeri v^i rappresentano le componenti di un vettore $\vec{v}$ in una data base se e solo se, al variare della base, si trasformano con la legge di controvarianza.

1.2 Orientamento.

Diciamo equivalenti due basi se sono legate da una matrice di passaggio con determinante positivo. Si verifica facilmente che questa é una relazione di equivalenza perché soddisfa le proprietá riflessiva, simmetrica e transitiva. Dimostriamo ora che ci sono solo due classi di equivalenza.

Infatti, se ce ne fossero piú di due, possiamo prenderne 3 ed una base in ciascuna di esse; se A_1 ed A_2



sono le matrici di passaggio come in figura, si ha $\det A_1 < 0$, $\det A_2 < 0$ da cui $\det A_2 A_1 > 0$. Poiché $A_2 A_1$ é la matrice di passaggio dalla prima alla terza base, ne segue che queste sono equivalenti, contro il fatto che si trovano in classi diverse.

Prendendo una base $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ ed operando una inversione del primo asse, cioé prendendo $\vec{e}'_1 = -\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}'_n = \vec{e}_n$, la matrice di passaggio é $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ con determinante -1. Perció si puó passare da una classe di equivalenza all' altra semplicemente invertendo uno degli assi.

Assumendo orientata positivamente una di queste classi, l' altra sará orientata negativamente.

Nello spazio fisico 3-dimensionale si assume orientata positivamente la base che ubbidisce alla regola della mano sinistra: "Se si dispone il pollice della mano sinistra parallelo e concorde ad $\vec{e}_1$, il medio ad $\vec{e}_2$, allora l' indice dovrá essere parallelo e concorde ad $\vec{e}_3$". Una tale base si chiama anche levogira.

Se si inverte il verso del pollice si cambia orientamento e, nello stesso tempo, é soddisfatta la regola precedente ma con la mano destra anziché la sinistra. Una tale base si dice anche destrogira.

Notiamo infine che con una rotazione l' orientamento non cambia; infatti, se essa avviene attorno ad

$\vec{e}_3$, la matrice di passaggio é

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ che ha determinante } 1.$$

Similmente per le rotazioni attorno ad $\vec{e}_2$ e per quelle attorno ad $\vec{e}_1$. Ne segue che anche piú rotazioni successive non fanno cambiare orientamento in quanto la matrice di passaggio é il prodotto delle varie matrici di passaggio. Questo conferma la validitá della regola della mano sinistra (e quella della mano destra), in quanto é sempre possibile mediante al piú 3 rotazioni far diventare il pollice ed il medio paralleli e concordi ad $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ rispettivamente.

1.3 Prodotto scalare.

In uno spazio vettoriale si definisce prodotto scalare pseudoeuclideo una applicazione dal prodotto cartesiano $V \times V$ a valori in $\Re$, ovvero che alla coppia di vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ associa un numero reale che indicheremo con $\vec{u} \cdot \vec{v}$, che soddisfa le seguenti proprietá

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} & \text{(Proprietá commutativa del prodotto scalare)} \\ a(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(a\vec{v}) & \text{(Proprietá associativa dei prodotti esterno e scalare)} \\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} & \text{(Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma)} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in V, \Rightarrow \vec{u} = \vec{0} & \text{(Proprietá di non singolaritá).} \end{cases} \tag{1.6}$$

Queste proprietà valgono ovviamente $\forall \vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ appartenenti a V ed a appartenente a $\Re$. In tal caso V viene anche chiamato spazio vettoriale pseudoeuclideo.

Si chiama "matrice della metrica" di uno spazio vettoriale pseudoeuclideo in una sua base $\vec{e}_i$, la matrice che ha come elementi

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \,. \tag{1.7}$$

Per la prima proprietá del prodotto scalare segue che tale matrice é simmetrica.

Da $\vec{u} = u^i\vec{e}_i$ e $\vec{v} = v^i\vec{e}_i$ segue

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = g_{ij}u^iv^j \,; \tag{1.8}$$

perció, se nota la matrice della metrica, é noto anche il prodotto scalare di due vettori. Applicando la (1.7) con $\vec{v} = \vec{e}_h$, si vede come dalla quarta proprietá del prodotto scalare segue che la matrice della metrica é non singolare. Viceversa, data una matrice g_{ij} simmetrica e non singolare e assumendo la (1.7) come definizione di $\vec{u}\cdot\vec{v}$, si vede che sono soddisfatte le proprietá del prodotto scalare.

Sostituendo la legge di cambiamento di base $(1.3)_1$ nella (1.7) si trova la legge con cui varia la matrice della metrica al variare della base, cioé

$$g_{ij} = A_i{}^{i'} A_j{}^{j'} g_{i'j'} ; \tag{1.9}$$

Si definisce anche la matrice della metrica con gli indici in alto, come la matrice inversa di g_{ij}, ovvero da

$$g^{ij} g_{jh} = \delta^i_h . \tag{1.10}$$

Sostituendo la (1.9) in (1.10) e moltiplicando per $A_i{}^{i'}$, si trova

$$A_i{}^{i'} g^{ij} A_j{}^{j'} A_h{}^{h'} g_{j'h'} = A_h{}^{i'} ;$$

moltiplicando questa per $B^h_{k'}$, matrice inversa di $A_\cdot^\cdot$, si trova

$$A_i{}^{i'} g^{ij} A_j{}^{j'} g_{j'k'} = \delta^{i'}_{k'} ;$$

confrontando questa con l' eq. (1.10), scritta aggiungendo i primi ' ai suoi indici, si trova che

$$g^{h'j'} = A_i{}^{h'} A_j{}^{j'} g^{ij} ; \tag{1.11}$$

che é la controparte dell' eq. (1.9) ma per la matrice della metrica con gli indici in alto.

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dicono ortogonali se e solo se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Si dice norma del vettore $\vec{u}$ il numero $\| \vec{u} \| = \vec{u}\cdot\vec{u}$. Si dice poi modulo del vettore $\vec{u}$ il numero $| \vec{u} | = \sqrt{| \| \vec{u} \| |}$, cioé la radice quadrata del valore assoluto della norma.

I prodotti scalari $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$ si dicono componenti covarianti di $\vec{v}$ nella base $\vec{e}_i$. Ovviamente, ne segue

$$v_i = v^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = v^j g_{ij} ; \tag{1.12}$$

con un cambiamento di base, si ha

$$v_{i'} = \vec{v}\cdot\vec{e}_{i'} = \vec{v}\cdot A_{i'}{}^i \vec{e}_i = v_i A_{i'}{}^i .$$

Si noti che la matrice con cui cambiano le componenti $v_{i'}$ é la stessa di $(1.3)_2$ con cui cambia la base $\vec{e}_{i'}$. Per questo motivo le componenti v_i vengono dette "componenti covarianti di $\vec{v}$.

Basi ortonormali.

I vettori $\vec{e}_i$, per $i = 1, ..., n$ si dicono ortonormali se $| \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j |= \delta_{ij}$. Ne segue che tali vettori sono linearmente indipendenti; infatti, da $a^i\vec{e}_i = 0$, moltiplicando scalarmente per $\vec{e}_j$, si ha $0 = \pm a^i\delta_{ij} = \pm a^j$. Ne segue che n vettori ortonormali formano una base. Dall' eq. (1.11) segue poi che, in una base ortonormale $v_i = \pm v^i$. Partendo da una base ortonormale, a meno di scambi di posto tra i suoi vettori, si può fare in modo che i primi suoi r vettori hanno norma 1 ed i rimanenti hanno norma -1. In tal modo il prodotto scalare di 2 vettori é la somma dei prodotti delle loro prime r componenti corrispondenti, diminuita della somma dei prodotti delle loro ultime $n - r$ componenti corrispondenti. La norma di un vettore é la somma dei quadrati delle sue prime r componenti, diminuita della somma dei quadrati delle sue ultime $n - r$ componenti. Possiamo ora dimostrare che il numero r non dipende dalla base prescelta; se infatti supponiamo per assurdo che nella base ortonormale $\vec{e}_{i'}$ si abbia $r' > r$, possiamo trovare un vettore non nullo $\vec{u}$ che ha le sue prime r componenti nella base $\vec{e}_i$ nulle, e le sue ultime $n-r'$ componenti nella base $\vec{e}_{i'}$ nulle (infatti questo equivale ad imporre $r+n-r' < n$ equazioni lineari omogenee in n incognite). Allora nella base $\vec{e}_i$ si avrebbe $\| \vec{u} \|\leq 0$, mentre nella base $\vec{e}_{i'}$ si avrebbe $\| \vec{u} \|\geq 0$, per cui $\| \vec{u} \|= 0$, e questo nella base $\vec{e}_i$ implicherebbe $\vec{u} = 0$, il che é un assurdo. Pertanto, $r = r'$; la successione $\{+ \cdots + - \cdots -\}$ di r simboli + e di $n - r$ simboli $-$ dicesi segnatura dello spazio vettoriale pseueuclideo.

Dimostriamo ora che, assegnata una base $\{\vec{a}_i\}$ di uno spazio pseudoeuclideo, é sempre possibile ottenere tramite essa una base ortonormale. Infatti

- se $\| \vec{a}_1 \| \neq 0$, cerco i coefficienti $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tali che, definendo

$$\vec{b}_1 = \| \vec{a}_1 \|^{-1} \quad \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{a}_1$$

$$\cdots$$

$$\vec{b}_n = \vec{a}_n + \lambda_n \vec{a}_1$$

si abbia $\quad | \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 | = 1, \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0, \cdots, \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_n = 0 .$

  Si trova la soluzione; mi accorgo che sono nella stessa situazione di prima ma col vantaggio che il primo vettore ha modulo unitario e tutti gli altri vettori sono ortogonali ad esso.

- se $\| \vec{a}_1 \| = 0$, ma esiste i tra $2, \cdots, n$ tale che $\| \vec{a}_i \| \neq 0$, allora scambiando $\vec{a}_i$ con $\vec{a}_1$ mi ritrovo nel caso precedente.

- se $\| \vec{a}_i \| = 0$ qualunque $i = 1, \cdots, n$, allora esiste j tra $2, \cdots, n$ tale che $\| \vec{a}_1 + \vec{a}_j \| \neq 0$, altrimenti avrei $0 = \| \vec{a}_1 + \vec{a}_j \| = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_j + \vec{a}_j \cdot \vec{a}_j$ da cui $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_j = 0$, da cui $\vec{a}_1 \cdot \vec{v} = \vec{a}_1 \cdot (v^i \vec{a}_i) = 0$ qualunque $\vec{v}$ per cui $\vec{a}_1 = 0$ contro il fatto che $\vec{a}_1$ faceva parte di una base.

  Posso perciò sostituire $\vec{a}_1$ con $\vec{a}_1 + \vec{a}_j$ e mi ritrovo nel primo caso.

Mi ritrovo perciò sempre col primo vettore di modulo unitario e gli altri ortogonali ad esso. Riapplico questo metodo a questi altri vettori, notando che con i suddetti passaggi essi saranno sí sostituiti da altri vettori, ma questi rimarranno sempre ortogonali al primo. E cosí via, gradualmente, raggiungo il risultato richiesto.

Spazi euclidei.

Dicesi euclideo uno spazio vettoriale pseudoeuclideo in cui é soddisfatta l' ulteriore condizione

$$\| \vec{v} \| > 0 \qquad \forall \vec{v} \neq 0 .$$

Si noti che la quarta proprietá del prodotto scalare é conseguenza di questa; infatti, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \ \forall \vec{v} \in V$, allora si potrá anche prendere $\vec{v} = \vec{u}$ da cui, per la nuova proprietá degli spazi euclidei, segue $\vec{u} = \vec{0}$. Ne segue anche che la metrica di uno spazio euclideo é una matrice definita positiva.

Sussiste anche la diseguaglianza di Schwarz: "Il valore assoluto del prodotto scalare di due vettori non supera il prodotto dei moduli dei fattori, cioé

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | \leq | \vec{u} | \quad | \vec{v} | \text{"}. \tag{1.13}$$

Infatti, questa proprietá é banale nel caso $\vec{v} = \vec{0}$; se invece $\vec{v} \neq \vec{0}$, da
$0 \leq \| \lambda\vec{v} + \vec{u} \| = \lambda^2 \| \vec{v} \| + 2\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{u} \|$, ho una disequazione di secondo grado che deve essere verificata qualunque λ; pertanto il trinomio deve avere discriminante non positivo, altrimenti la nostra disequazione sarebbe violata per valori di λ interni alle due radici. Dunque,
$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \| \vec{v} \| \| \vec{u} \| \leq 0$ (abbiamo diviso per 4 il discriminante), da cui segue la (1.13).
Si ha pure la diseguaglianza triangolare:

$$| \quad | \vec{v} | - | \vec{u} | \quad | \leq | \vec{v} + \vec{u} | \leq | \vec{v} | + | \vec{u} | . \tag{1.14}$$

A questo riguardo, basterá dimostrare la relazione che si ottiene da essa elevando al quadrato, cioé $-2 \ | \ \vec{u} \ || \ \vec{v} \ | \leq 2\vec{u} \cdot \vec{v} \leq 2 \ | \ \vec{u} \ || \ \vec{v} \ |$ che é vera per la diseguaglianza di Schwarz (Abbiamo semplificato, in tutti e tre i termini, $| \vec{u} |^2 + | \vec{v} |^2$).
Dalla (1.13) segue poi che esiste certamente un angolo ϑ tale che

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{| \vec{u} | \quad | \vec{v} |}, \tag{1.15}$$

in quanto il lato destro di questa relazione ha valore assoluto non maggiore di uno, per la diseguaglianza di Schwarz. Tale angolo può essere chiamato "angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$". Dunque in qualunque spazio euclideo può essere definito l' angolo tra due vettori e il loro prodotto scalare é uguale al prodotto dei loro moduli per il coseno dell' angolo compreso.
Altre proprietá valide in uno spazio euclideo e con una base ortonormale sono:

- la matrice della metrica é la matrice identica,
- non c' é differenza tra componenti controvarianti e covarianti di un vettore,
- il prodotto scalare di due vettori é la somma dei prodotti delle loro componenti corrispondenti,
- la norma di un vettore é la somma dei quadrati delle sue componenti.

1.4 Matrici ortonormali.

Se siamo in uno spazio euclideo ed entrambe le basi sono ortonormali, allora avremo $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$, cosicché l' eq. (1.9) diviene $\delta_{ij} = A_i{}^{i'} A_j{}^{i'}$, cioé $AA^T = I$; in altre parole, il prodotto di una riga di A per se stessa dá 1, mentre il prodotto di due righe distinte di A é zero. Si ha anche che A^T é la matrice inversa di A. Ne segue poi che $A^T A = I$, per cui il prodotto di una colonna di A per se stessa dá 1, mentre il prodotto di due colonne distinte di A é zero. Questo tipo di matrici si dicono ortonormali. Il determinante di $AA^T = I$ é $(\det A)^2 = 1$, cioé il determinante di una matrice ortonormale é 1 oppure -1. Quelle con determinante 1 preservano l' orientamento, mentre le altre lo cambiano.

2 Vettori nello spazio fisico.

Cominciamo questa sezione con l' Assioma dello Spazio Fisico: "Ad ogni osservatore lo spazio fisico appare tridimensionale omogeneo ed isotropo e vale in esso, per le figure in quiete, l' ordinaria geometria euclidea".

Consideriamo ora l' insieme dei segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, essendo A e B i punti estremi del segmento, e l' orientamento va da A verso B. Diciamo che due segmenti orientati hanno la stessa direzione se sono paralleli (Il segmento orientato di lunghezza nulla é inteso parallelo a qualunque altro), chiamiamo loro modulo la loro lunghezza; due segmenti orientati paralleli $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{A'B'}$ sono detti concordi se

- i segmenti $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ non hanno punti in comune, nel caso che A, A', B, B' non stanno su una stessa retta,
- B' é a destra di A' se B é a destra di A mentre B' é a sinistra di A' se B é a sinistra di A, nel caso che A, A', B, B' stanno su una stessa retta.

Diciamo equivalenti due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{A'B'}$ se sono paralleli, concordi ed hanno stesso modulo. Si può dimostrare che questa relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, per cui é una relazione di equivalenza. L' insieme delle classi di equivalenza é chiamato vettore dello spazio fisico.

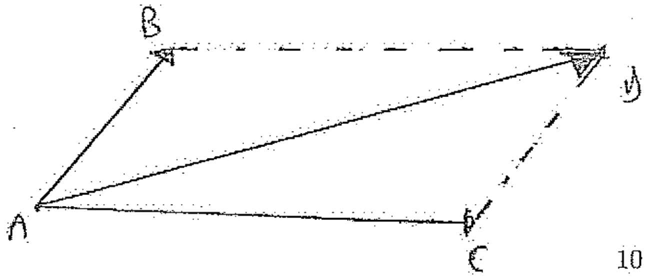
Definiamo la somma di due vettori non paralleli con la regola del parallelogramma: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; disegnato il parallelogramma $ABCD$, la somma dei due vettori é definita come la classe di equivalenza in cui sta la diagonale $\overrightarrow{AD}$.

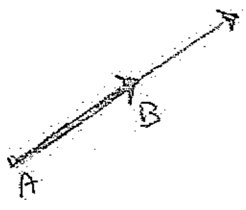
Definiamo la somma di due vettori paralleli e concordi con la regola: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; il segmento orientato parallelo e concorde ad essi e con modulo uguale alla somma dei loro moduli identifica una classe di equivalenza che chiamiamo somma dei due vettori.

Definiamo la somma di due vettori paralleli, discordi e con moduli diversi con la regola: Sia $\overrightarrow{AB}$ un elemento della classe di uno dei due vettori ed $\overrightarrow{AC}$ un elemento della classe dell' altro; il segmento orientato parallelo ad essi e concorde a quello con modulo piú grande, ed avente come modulo il valore assoluto delle differenza dei loro moduli, identifica una classe di equivalenza che chiamiamo somma dei due vettori.

Infine, definiamo somma di due vettori paralleli, discordi e con stesso modulo, il vettore di modulo nullo.

Si può verificare che tali definizioni non dipendono dai rappresentanti scelti nelle classi dei due vettori. Definiamo prodotto di un numero reale a per un vettore di cui $\overrightarrow{AB}$ é un rappresentante il vettore rappresentato dal segmento orientato di modulo uguale a quello di $\overrightarrow{AB}$ moltiplicato per $|\, a \,|$, parallelo ad $\overrightarrow{AB}$ e concorde con esso se $a > 0$, discorde se $a < 0$. Ovviamente, se $a = 0$ il vettore prodotto é quello nullo, ovvero quello di modulo nullo. Anche in questo caso si può verificare che tale definizione non dipende dalla scelta del rappresentante $\overrightarrow{AB}$.





Si può poi verificare che, con le suddette operazioni di somma e prodotto esterno, sono soddisfatte le proprietà (1.1), (1.2) per cui il nostro é uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE: Diciamo **prodotto scalare** dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il prodotto dei loro moduli per il coseno dell' angolo tra essi compreso (Questi angoli sono 2 ma, essendo supplementari, hanno lo stesso coseno; se i due vettori sono paralleli e concordi l' angolo é 0, se sono paralleli e discordi l' angolo é π).

Si vede che con tale definizione sono soddisfatte le proprietá degli spazi vettoriali euclidei; due vettori ortogonali nel senso che $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, lo sono nel senso geometrico, cioé che l' angolo compreso é $\pi/2$. Dividendo un vettore non nullo per il suo modulo si trova un vettore di modulo unitario, parallelo ed equiverso a quello originale, e che viene chiamato suo versore. Si può anche definire versore $\vec{r}$ di una retta r come uno dei 2 versori paralleli alla retta stessa; in tal caso $\vec{u} \cdot \vec{r} = u_r$ é in valore assoluto pari alla proiezione ortogonale di $\vec{u}$ sulla retta r.

Definiamo ora il **simbolo di Levi-Civita:**

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ é una permutazione pari di } 123 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ é una permutazione dispari di } 123 \\ 0 & \text{se } ijk \text{ non é una permutazione di } 123\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

(ijk é una permutazione pari di 123 se si può ottenere da 123 con un numero pari di scambi tra numeri 1, 2 e 3; è una permutazione dispari se si può ottenere da 123 con un numero dispari di scambi). Una proprietá importante di tale simbolo é la seguente: "Se A_{ij} sono gli elementi di una matrice $3X3$, allora il suo determinante é

$$\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \det A \text{"}. \tag{2.17}$$

Infatti, $\varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{1jk} A_{11} A_{j2} A_{k3} + \varepsilon_{2jk} A_{21} A_{j2} A_{k3} + \varepsilon_{3jk} A_{31} A_{j2} A_{k3} = \varepsilon_{123} A_{11} A_{22} A_{33} + \varepsilon_{132} A_{11} A_{32} A_{23} + \varepsilon_{213} A_{21} A_{12} A_{33} + \varepsilon_{231} A_{21} A_{32} A_{13} + \varepsilon_{312} A_{31} A_{12} A_{23} + \varepsilon_{321} A_{31} A_{22} A_{13}$, da cui quanto asserito. Ovviamente, $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ é il determinante della matrice ottenuta da A_{ij} scambiando le righe con le colonne, per cui è sempre il determinante di A_{ij}. Si ha pure

$$\varepsilon_{ijk} A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} = \varepsilon_{i'j'k'} \det A. \tag{2.18}$$

Infatti, se $i'j'k'$ é una permutazione pari di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che si ottiene da A_{ij} con un numero pari di scambi tra le sue colonne, per cui è uguale al secondo membro; similmente, se $i'j'k'$ é una permutazione dispari di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che si ottiene da A_{ij} con un numero dispari di scambi tra le sue colonne, per cui è uguale al secondo membro; infine, se $i'j'k'$ non é una permutazione di 123, il primo membro è il determinante di una matrice che ha due colonne uguali, per cui è zero, come il secondo membro.

DEFINIZIONE: Diciamo **prodotto vettoriale** dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore che, nella base $\vec{e}_i$ ha componenti

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^i = g^{ij}\varepsilon_{jhk}u^h v^k . \tag{2.19}$$

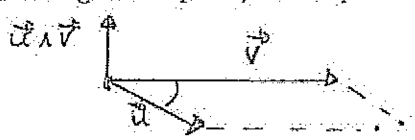
Ma rappresenta questa terna di numeri veramente un vettore? Per saperlo, vediamo se è soddisfatta la legge di controvarianza

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^{i'} = A_i{}^{i'}(\vec{u}\wedge\vec{v})^i = A_i{}^{i'}g^{ij}\varepsilon_{jhk}u^h v^k ,$$

che deve essere uguale alla (2.19) scritta con i $'$, cioè

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^{i'} = g^{i'j'}\varepsilon_{j'h'k'}u^{h'}v^{k'} = A_i{}^{i'}A_j{}^{j'}g^{ij}\varepsilon_{j'h'k'}A_h{}^{h'}u^h A_k{}^{k'}v^k = \varepsilon_{jhk}u^h v^k A_i{}^{i'}g^{ij}(\det A)^{B} ,$$

(abbiamo usato la (1.11) e la legge di controvarianza nel penultimo passaggio, e l' eq. (2.18) nell' ultimo) per cui l' uguaglianza è verificata, ma solo per le trasformazioni con $\det A = 1$ (Si potrebbe anche dimostrare che queste sono le trasformazioni che lasciano invariato il volume di una figura). Un caso particolare sono le trasformazioni ortogonali che preservano l' orientamento. Visto questo, possiamo dire che il prodotto vettoriale non rappresenta un vettore; lo chiamiamo pseudo-vettore e, a tutti gli effetti, si trasforma come un vettore ma solo per le trasformazioni con determinante unitario. In particolare, partendo da una base ortonormale levogira possiamo considerare la trasformazione ortonormale che preserva l' orientamento e che porta l' asse delle x parallelo ed equiverso ad $\vec{u}$ e l' asse delle y parallelo ed equiverso alla componente di $\vec{v}$ ortogonale ad $\vec{u}$. In tal caso la (2.19) ci dice che $(\vec{u}\wedge\vec{v})^i = \varepsilon_{i12}u^1v^2$ per cui $\vec{u}\wedge\vec{v} \equiv (0\,,\,0\,,\,u^1v^2)$, cioè il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è ortogonale ad entrambi, ha verso tale che la terna $\vec{u}$, $\vec{v}$ ed $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sia levogira e modulo pari al prodotto dei moduli per il seno dell' angolo compreso, ovvero pari all' area del parallelogramma che ha $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come lati contigui.



Dalla definizione (2.19) e dalla proprietá (2.17) segue che

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}, \tag{2.20}$$

cioé $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é dato da un determinante simbolico nella cui prima riga ci sono i versori degli assi, nella seconda le componenti del primo vettore e nella terza riga le componenti dell' altro vettore; sebbene sia un determinante simbolico, si calcola con le solite regole dei determinanti. Dalle precedenti seguono poi anche le seguenti proprietá:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}//\vec{v},$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u},$$

$$(m\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(m\vec{v})=m\vec{u}\wedge\vec{v},$$

$$\vec{u}\wedge\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{u}\wedge\vec{v}_i,$$

$$\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2=\vec{e}_3.$$

La seconda di questa mostra che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, anzi cambia segno quando si cambia l' ordine dei fattori. All' ultima bisogna aggiungere tutte quelle che si ottengono da essa con una permutazione ciclica degli indici 1,2,3 , e quelle che si ottengono da queste scambiando l' ordine dei fattori ed usando la proprietá anticommutativa. Altra proprietá rilevante é

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} \quad , \quad \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} \quad ,$$

nota come proprietà del **doppio prodotto vettoriale**; la seconda di queste segue dalla prima e dalla proprietá anticommutativa del prodotto vettoriale. Per provare la prima, basterá farlo in un riferimento ortonormale levogiro opportuno e, come tale, prendiamo quello in cui $\vec{u}\equiv(u,0,0)$ e $\vec{v}\equiv(v_1;v_2,0)$; in tal caso tale relazione diviene

$$uv_2(-w_2\,;\,w_1,0)=(uw_1v_1-v_1w_1u-v_2w_2u\,;\,uw_1v_2\,;\,0)\,,$$

che é certamente verificata.

Un' ultima proprietà che ci sar à utile nel seguito è riferita all' **Equazione vettoriale**: Dati i vettori

$\underline{u}$ e $\underline{v}$ con $\underline{u} \neq \underline{0}$, si tratta di trovare il vettore $\underline{x}$ tale che

$$\underline{x} \wedge \underline{u} = \underline{v}. \tag{21}$$

Sussiste il seguente TEOREMA: "Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (21) ammetta soluzioni é che $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. In tal caso, tutte e sole le soluzioni sono date da

$$\underline{x} = \frac{\underline{u} \wedge \underline{v}}{u^2} + \lambda \underline{u}, \quad \forall \lambda \in \Re". \tag{22}$$

Proof. Il fatto che $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ sia condizione necessaria, segue dalla definizione di prodotto vettoriale. Per dimostrare che essa é anche sufficiente, basta verificare che grazie ad essa la (21) ha soluzione. Per semplicitá cerchiamo una soluzione parallela a $\underline{u} \wedge \underline{v}$, cioé del tipo $\underline{x} = \mu \underline{u} \wedge \underline{v}$. Sostituendo quest'ultima espressione nella (21) si trova $\mu = \frac{1}{u^2}$. Se indichiamo con x^* la corrispondente soluzione, si ha $\underline{x^*} \wedge \underline{u} = \underline{v}$. Ci chiediamo se esistono altre soluzioni: sottraendo $\underline{x^*} \wedge \underline{u} = \underline{v}$ dall'equazione (21), si trova $(\underline{x^*} - \underline{x}) \wedge \underline{u} = 0$, per cui deve essere $\underline{x^*} - \underline{x} = \lambda \underline{u}$ da cui segue la (22). ∎

Consideriamo ora la definizione: "Dicesi **Prodotto misto** dei vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ il prodotto scalare $\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w}$" (Ovviamente prima va eseguito il prodotto vettoriale e poi quello scalare, altrimenti non avrebbe senso uno scalare moltiplicato vettorialmente per un vettore). Sussistono le seguenti proprietá:

Proprietá 1: "Il prodotto misto, in termini delle componenti dei suoi fattori in una data base ortonormale, é dato dal determinante

$$\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{23}$$

che segue facilmente dalla (20).

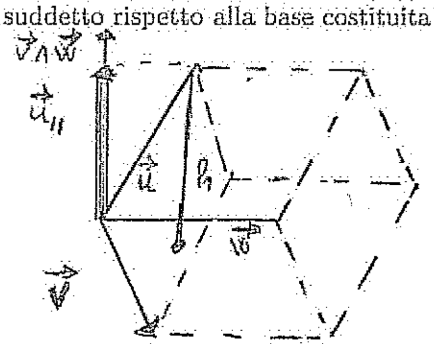
Proprietá 2: "Il prodotto misto di 3 vettori é nullo se e solo se i 3 vettori sono complanari". (Segue facilmente dalla (23)).

Proprietá 3: "Il prodotto misto di 3 vettori non cambia se si permutano ciclicamente i suoi fattori". (Segue facilmente dalla (23) in quanto una permutazione ciclica dei fattori equivale ad un numero pari di scambi tra le righe del determinante).

Proprietá 4: "Nel prodotto misto (23) si possono scambiare i simboli di prodotto scalare e prodotto vettoriale senza cambiare il risultato". (Infatti, per la proprietá commutativa del prodotto scalare, si ha $\underline{u} \wedge \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{u} \wedge \underline{v}$ che differisce da $\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w}$ solo per una permutazione ciclica dei fattori).

Proprietá 5: "Il prodotto misto dei 3 vettori non complanari $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ é positivo se e solo se $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ é una terna levogira, é negativo se la suddetta terna é destrogira". (Infatti nel primo caso l' angolo tra $\underline{u}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$ é acuto, mentre nel secondo caso é ottuso).

Proprietá 6: "Il valore assoluto del prodotto misto dei 3 vettori non complanari $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ coincide col volume del parallelepipedo che ha $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ come spigoli concorrenti in uno stesso vertice". (Infatti possiamo sempre scrivere $\underline{u}$ come somma della sua componente $\underline{u}_{\parallel}$ parallela a $\underline{v} \wedge \underline{w}$ e della sua componente $\underline{u}_{\perp}$ ortogonale a $\underline{v} \wedge \underline{w}$. Dopo ciò si ha $\underline{u} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{u}_{\parallel} \cdot \underline{v} \wedge \underline{w} = \pm \mid \underline{u}_{\parallel} \mid \mid \underline{v} \wedge \underline{w} \mid$ e la proprietá segue dal fatto che $\mid \underline{v} \wedge \underline{w} \mid$ é l' area del parallelogramma che ha come spigoli $\underline{v}$ e $\underline{w}$, mentre $\mid \underline{u}_{\parallel} \mid$ é l' altezza del parallelepipedo suddetto rispetto alla base costituita dal summenzionato parallelogramma).



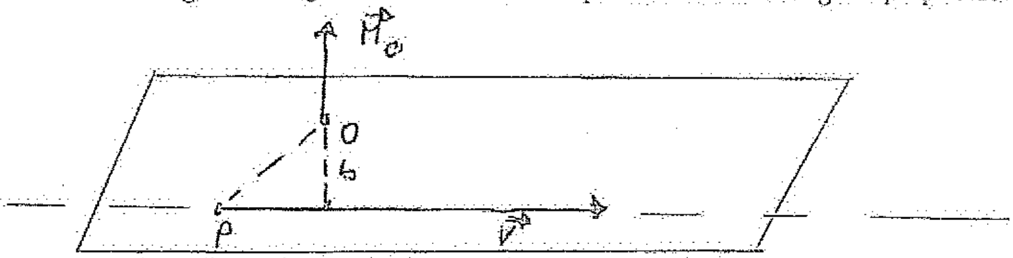
3 Sistemi di vettori applicati

Sistema di vettori applicati è un insieme di coppie $(\vec{v}_i, P_i)$ il cui primo elemento è un vettore, ed il secondo è il punto in cui è applicato. La retta passante per P_i e parallela a $\vec{v}_i$ si chiama anche retta d' applicazione di $\vec{v}_i$. Si definiscono poi il risultante ed il momento di polo O del sistema come

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \qquad , \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \vec{v}_i \, . \tag{3.24}$$

Nel caso di un sol vettore applicato, cioè $N = 1$, la distanza del polo O dalla retta d' applicazione di $\vec{v}_i$ si chiama braccio; si ha inoltre che il modulo di $\vec{M}_O$ è pari al modulo del vettore per il braccio, la sua direzione è ortogonale al piano passante per O e contenente la retta d' applicazione, il suo verso è quello da cui si vede ruotare $P_i - O$ in senso antiorario allorchè si sposta il vettore lungo la sua retta d' applicazione nel verso del vettore stesso.

Da ciò segue che $\vec{M}_O$ non varia allorchè si sposta un vettore lungo la propria retta d' applicazione e,



nel caso di un sol vettore applicato, $\vec{M}_O$ è zero se e solo se esso è nullo o la sua retta d' applicazione passa per O. Dall' equazione (3.24) segue che $\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N}(P_i - O + O - O') \wedge \vec{v}_i$ da cui

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}, \tag{3.25}$$

che ci dà la legge con cui varia il momento al variare del polo. Il suo ultimo termine è il momento $\vec{M}_{O'}$ che si avrebbe se avessimo il solo vettore $\vec{R}$ applicato in O. Da essa segue anche che il momento non dipende dal polo O solo per i sistemi a risultante nullo. Un caso significativo di questo tipo è il seguente:

Dicesi coppia il sistema di 2 vettori applicati opposti $(\vec{v}, A)$ e $(-\vec{v}, B)$. Ovviamente le due rette d' applicazione stanno su un piano, detto piano della coppia, e la loro distanza si chiama braccio della coppia; il modulo di $\vec{v}$ viene anche detto intensità della coppia.

Poichè il momento di una coppia non dipende dal polo, possiamo prendere polo B, ottenendo che il momento della coppia è quello del solo vettore applicato $(\vec{v}, A)$ ma rispetto al polo B. In particolare, ne segue che il modulo del momento di una coppia è il prodotto dell' intensità e del braccio della coppia. Si ha anche la

PROPRIETA': "Esistono infinite coppie di assegnato momento".

Infatti all' equazione $(A - O) \wedge \vec{v} = \vec{M}_O$ si possono applicare le considerazioni dell' equazione vettoriale ottenendo che, pur di scegliere A sul piano passante per O ed ortogonale ad $\vec{M}_O$, si trovano infiniti valori per $\vec{v}$; oppure, pur di scegliere $\vec{v}$ ortogonale ad $\vec{M}_O$, si trovano infiniti valori per $A - O$. Dopo ciò la coppia richiesta è $(\vec{v}, A)$ e $(-\vec{v}, O)$.

DEFINIZIONE: "Due sistemi Σ e Σ' di vettori applicati li diciamo equivalenti se hanno lo stesso risultante, e lo stesso momento rispetto a qualunque polo O".

Dalla legge (3.25) di variazione del momento al variare del polo, segue che se questo è vero per un polo O, sarà vero anche per tutti gli altri O'; pertanto, è sufficiente imporre la condizione per un solo polo O arbitrariamente scelto. E' facile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza in quanto sono soddisfatte le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Un sistema di vettori applicati in uno stesso punto O viene chiamato **Sistema di Varignon**; è evidente che esso è equivalente al suo risultante applicato in O.

Le seguenti due operazioni sono dette **operazioni invariantive elementari**:

- spostare uno dei vettori applicati lungo la propria retta d' applicazione,
- sostituire più vettori applicati in uno stesso punto con la loro somma applicata nello stesso punto, oppure l' inversa: sostituire un vettore applicato in O con più vettori applicati in O che hanno il vettore dato come somma.

E' ovvio che tali operazioni trasformano un sistema in un altro ad esso equivalente.

Sussistono le seguenti due proprietà:

Proprietà 1: "Ogni sistema Σ di vettori applicati è equivalente al proprio risultante applicato in punto scelto ad arbitrio O più una coppia avente momento $\vec{M}_O$ uguale a quello di Σ".

Proprietà 2: "Ogni sistema Σ di vettori applicati è equivalente a due soli vettori applicati di uno dei quali si può scegliere ad arbitrio il punto di applicazione".

La prima proprietà si dimostra facilmente; per la seconda, basta rifarsi alla prima e scegliere O come punto di applicazione di uno dei due vettori della coppia, sommando in seguito questi ad $\vec{R}$.

Proprietà 3: "Ogni sistema Σ di vettori applicati è equivalente a tre soli vettori applicati i cui punti di applicazione A_1, A_2 ed A_3 possono essere scelti ad arbitrio, purché non allineati".

Si può dimostrare questo anche solo attraverso operazioni invariantive elementari, distinguendo i seguenti casi:

- Vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con A non complanare con A_1, A_2 ed A_3: Noto che i vettori $A_1 - A$,

$A_2 - A$, $A_3 - A$ sono linearmente indipendenti. Decompongo allora $\vec{v}$ nella somma di 3 vettori lungo le direzioni $A_1 - A$, $A_2 - A$, $A_3 - A$ sempre applicati in A; trasporto poi ciascuno di questi vettori lungo la propria retta di applicazione sostituendoli cosi' con 3 vettori applicati rispettivamente in A_1, A_2 ed A_3.

- Vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con A complanare con A_1, A_2 ed A_3, ma con $\vec{v}$ non complanare con A_1, A_2 ed A_3: Trasporto $\vec{v}$ lungo la sua retta d' applicazione; in tal modo il suo punto di applicazione esce fuori dal piano e ritorno al caso precedente. A questo punto ho un sistema di 3 vettori applicati in A_1, A_2 ed A_3 e di altri vettori applicati in punti del piano π di A_1, A_2 ed A_3 e paralleli a tale piano.

- Vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con A e $\vec{v}$ appartenenti a π ed A non allineato ad A_1, A_2: Decompongo allora $\vec{v}$ nella somma di 2 vettori lungo le direzioni $A_1 - A$, $A_2 - A$ sempre applicati in A; trasporto poi ciascuno di questi vettori lungo la propria retta di applicazione sostituendoli cosi' con 2 vettori applicati rispettivamente in A_1 ed A_2. Faccio la stessa cosa con i vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con A e $\vec{v}$ appartenenti a π ed A non allineato ad A_1, A_3 e con quelli con A non allineato ad A_2, A_3.

- Vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con $\vec{v}$ appartenente a π, A allineato ad A_1, A_2, ma $\vec{v}$ non parallelo ad A_1, A_2: Trasporto $\vec{v}$ lungo la sua retta d' applicazione; in tal modo il suo punto di applicazione esce fuori dalla retta di A_1, A_2 e ritorno al caso precedente. Faccio la stessa cosa con i vettori applicati $(\vec{v}, A)$ con $\vec{v}$ appartenente a π, A allineato ad A_1, A_3, ma $\vec{v}$ non parallelo ad A_1, A_3 e con quelli con A allineato ad A_2, A_3, ma $\vec{v}$ non parallelo ad A_2, A_3.

- Rimangono ora solo vettori la cui retta di applicazione passa per A_1, A_2 oppure per A_1, A_3 oppure per A_2, A_3: Li trasporto lungo la propria retta di applicazione sostituendoli cosi' con 3 vettori applicati rispettivamente in A_1, A_2 ed A_3. Sostituisco tutti i vettori applicati in A_1 con la loro somma sempre applicata in A_1; similmente per quelli applicati in A_2 o in A_3.

Cosi' la dimostrazione é completata. Si noti però che, con lo stesso metodo, il componente parallelo a π del vettore applicato in A_3 può essere sostituito con 2 vettori applicati in A_2, A_3; similmente,il componente parallelo alla retta $\overrightarrow{A_1A_2}$ del vettore applicato in A_2 può essere sostituito con un vettore applicato in A_1. Dunque si ha la

Proprietà 4: "un qualunque sistema di vettori applicati é equivalente a tre soli vettori applicati $(\vec{v}_1\ ,\ A_1)$, $(\vec{v}_2\ ,\ A_2)$ e $(\vec{v}_3\ ,\ A_3)$ con A_1, A_2 ed A_3 scelti ad arbitrio, purché non allineati, con $\vec{v}_3$ ortogonale al piano di A_1, A_2 ed A_3, e $\vec{v}_2$ ortogonale alla retta $\overrightarrow{A_1A_2}$".

DEFINIZIONE: Un sistema di vettori applicati si dice equivalente a zero se é equivalente ad un sistema fatto di vettori tutti nulli. Segue facilmente la

Proprietà 5: "Un sistema di 2 soli vettori applicati é equivalente a zero se e solo se i due vettori sono nulli o formano una coppia di braccio nullo".

3.1 Invariante scalare, invariante vettoriale e asse centrale

Dalla legge di variazione del momento al variare del polo $\underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + (O - O') \wedge \underline{R}$ moltiplicando scalarmente per $\underline{R}$ si trova $\underline{M}_{O'} \cdot \underline{R} = \underline{M}_O \cdot \underline{R}$ e pertanto lo scalare $I = \underline{M}_O \cdot \underline{R}$ non dipende dal polo O prescelto; lo chiamiamo **invariante scalare**.

Se $\underline{R} \neq \underline{0}$ possiamo decomporre $\underline{M}_O$ in una componente parallela ad $\underline{R}$ ed in una ortogonale (a $\underline{R}$); la componente parallela ha coefficiente $\frac{I}{R}$ e versore $\frac{\underline{R}}{R}$, e pertanto si ha $\underline{M}_{O||} = \frac{I}{R^2}\underline{R}$ a cui si dá il nome di **invariante vettoriale**.

Ci si puó chiedere se esistono dei poli P tali che $\underline{M}_P \parallel \underline{R}$, in modo che $\underline{M}_P$ abbia solo la componente parallela ad $\underline{R}$; vedremo che tali poli esistono, anzi formano una retta che chiameremo **asse centrale**. Infatti dalla legge di variazione del momento al variare del polo, si ha $\underline{M}_P = \underline{M}_O + (O - P) \wedge \underline{R}$ e si vuole che sia uguale a $\frac{I}{R^2}\underline{R}$, cioé

$$(P - O) \wedge \underline{R} = \underline{M}_O - \frac{I}{R^2}\underline{R}.$$

Questa ci riconduce all'equazione vettoriale con $\underline{x} = P - O$, $\underline{u} = \underline{R}$ e $\underline{v} = \underline{M}_O - \frac{I}{R^2}\underline{R}$. Poiché $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{M}_O \cdot \underline{R} - I = 0$, per quanto visto nella sezione precedente l'equazione ammette soluzioni e queste sono date da

$$P - O = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{R^2} + \lambda \underline{R}$$

che al variare di λ descrive l'asse centrale.

Per un sistema di vettori applicati paralleli $(f_i \underline{e}, A_i)$, la suddetta equazione dell'asse diviene

$$P - O = \frac{(\sum_{i=1}^{N} f_i)\underline{e} \wedge [\sum_{j=1}^{N} (A_j - O) \wedge f_j \underline{e}]}{(\sum_{i=1}^{N} f_i)^2 e^2} + \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i \underline{e} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j (A_j - O)}{\sum_{i=1}^{N} f_i} + \sum_{i=1}^{N} f_i [\lambda - \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j \underline{e} \cdot (A_j - O)}{(\sum_{i=1}^{N} f_i)^2 e^2}] \underline{e}.$$

Pertanto, al variare di $\underline{e}$ si ottiene una stella di assi centrali tutti passanti per il punto C definito da

$$C - O = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j (A_j - O)}{\sum_{i=1}^{N} f_j}. \tag{3.26}$$

Esso viene chiamato centro del sistema di vettori applicati paralleli. Si noti che non dipende da $\underline{e}$.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA: "Ogni sistema Σ a invariante scalare scalare nullo é equivalente al proprio risultante $\underline{R}$ applicato in un punto dell'asse centrale se $\underline{R} \neq \underline{0}$, ad una coppia avente il momento di Σ se $\underline{R} = \underline{0}$".

Dimostrazione. Infatti se $\underline{R} = \underline{0}$ é ovvio che si presenta la seconda di tali eventualitá. Se invece $I = 0$ ma $\underline{R} \neq \underline{0}$, preso O sull'asse centrale si ha che $0 = I = \underline{M}_O \cdot \underline{R} = \pm \mid \underline{M}_O \mid R$ da cui $\underline{M}_O = \underline{0}$ per cui si presenta la prima di tali eventualitá. Si noti anche che nel caso di un sistema di vettori applicati paralleli a risultante non nullo, esso é equivalente al proprio risultante $\underline{R}$ applicato nel suo centro. □

Sussiste anche il

TEOREMA: "Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati sia equivalente ad un sol vettore o ad una sola coppia é che abbia invariante scalare nullo".

Dimostrazione. La condizione sufficiente é stata provata nel teorema precedente, mentre la condizione necessaria é banale. Infatti se il sistema é equivalente a $(\underline{R}, O)$, allora $\underline{M}_O = \underline{0}$ e quindi $I = 0$; se il sistema é equivalente ad una sola coppia, allora $\underline{R} = \underline{0}$ da cui $I = 0$. □

Un esempio di sistema elementare di questo tipo é costituito dal caso, giá esaminato, di vettori applicati paralleli; in tal caso, e se $\underline{R} \neq 0$ il sistema é equivalente ad $\underline{R}$ applicato nel centro C e questo indipendentemente dalla comune direzione $\underline{e}$ dei vettori applicati. Un altro esempio é dato dal caso in cui tutti i vettori applicati giacciono su uno stesso piano.

Vediamo ora alcune proprietá del centro di un sistema di vettori applicati paralleli. Cominciamo col caso di 2 soli vettori applicati paralleli. Dall' eq. (3.26) con $O = C$, si ha

$$A_1 - C = -\frac{f_2}{f_1}(A_2 - C).$$

Da questa segue che il centro sta sulla retta $\overrightarrow{A_1 A_2}$; in particolare, é interno al segmento $\overline{A_1 A_2}$ se i due vettori sono concordi, mentre se essi sono discordi sta nella semiretta avente A_1 come estremo se il vettore applicato in A_1 ha modulo piú grande dell' altro, nella semiretta avente A_2 come estremo se il vettore applicato in A_2 ha modulo piú grande dell' altro. Inoltre i segmenti $\overline{A_1 C}$ ed $\overline{A_2 C}$ sono inversamente proporzionali ai moduli dei vettori in loro applicati.

3cm

Torniamo al caso piú generale con piú vettori applicati paralleli a risultante non nullo. Si ha la PROPRIETA' DISTRIBUTIVA DEL BARICENTRO: "Il centro di un sistema di vettori applicati paralleli non cambia se si sostituisce un suo sottoinsieme col risultante di questi applicato nel centro del sottosistema".

Infatti pur di cambiare nomi ai vettori applicati possiamo far sí che quelli del sottoinsieme siano gli ultimi $N - n$. Il centro del sistema modificato é

$$C^* - O = \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j(A_j - O) + (\sum_{i=n+1}^{N} f_j)(C' - O)}{\sum_{i=1}^{n} f_j + \sum_{i=n+1}^{N} f_j} =$$
$$\frac{\sum_{j=1}^{n} f_j(A_j - O) + \sum_{i=n+1}^{N} f_j(A_j - O)}{\sum_{i=1}^{n} f_j + \sum_{i=n+1}^{N} f_j} = C - O,$$

dove abbiamo indicato con C' il centro del sottoinsieme. Si hanno anche le

PROPRIETA' 2: "Se i punti di applicazione di un sistema di vettori applicati paralleli stanno su un piano, allora anche il loro centro sta su tale piano".

Per la dimostrazione, basta prendere il suddetto piano come piano $z = 0$, prendere O nell' origine, e fare la componente z dell' eq. (3.26). Similmente si prova la

PROPRIETA' 3: "Se i punti di applicazione di un sistema di vettori applicati paralleli stanno su una retta, allora anche il loro centro sta su tale retta".

Per la dimostrazione, basta prendere la suddetta retta come retta $y = 0$, $z = 0$, prendere O nell' origine, e fare le componenti y e z dell' eq. (3.26).

PROPRIETA' 4: "Il centro di un sistema di vettori applicati paralleli ed equiversi é non esterno alla minima figura convessa contenente tutti i punti di applicazione" (Si puó dimostrare che tra tutti gli insiemi convessi contenenti un insieme di punti assegnato ce n' é uno che é contenuto in tutti gli altri; esso é la minima figura convessa contenente l' insieme di punti assegnato).

Lo si prova usando la proprietá distributiva del centro e quella del centro di 2 soli vettori applicati paralleli ed equiversi.

3.2 Momento assiale di un sistema di vettori applicati.

Dicesi momento assiale di un sistema Σ di vettori applicati rispetto ad una retta di versore $\vec{r}$, lo scalare

$$M_r = \vec{M}_O \cdot \vec{r}, \tag{3.27}$$

dove O é un punto della retta r. Dalla legge di variazione del momento al variare del polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$, moltiplicando scalarmente per $\vec{r}$ si trova $\vec{M}_{O'} \cdot \vec{r} = \vec{M}_O \cdot \vec{r} + (O - O') \wedge \vec{R} \cdot \vec{r} = \vec{M}_O \cdot \vec{r}$, in quanto $O - O'$ sta sulla retta r ed é perció parallelo ad $\vec{r}$. Ecco perché in M_r abbiamo omesso di indicare il polo O: il momento assiale non dipende dalla scelta di O sulla retta r.

Nel caso di un sol vettore applicato l' eq. (3.27) diviene $M_r = (P - O) \wedge \vec{v} \cdot \vec{r}$ per cui,

PROPRIETA' 1:"Il momento assiale di un sol vettore applicato é nullo se e solo se o il vettore é nullo o la sua retta d' applicazione é complanare all' asse".

Esclusi tali casi, si ha la

PROPRIETA' 2:"Il momento assiale di un vettore applicato $(\vec{v}, A)$ rispetto ad un asse r é uguale al prodotto della componente di $\vec{v}$ normale ad r per la minima distanza di r dalla retta d' applicazione del vettore, preso col segno + 0 − a seconda che $\{A - O, \vec{v}, \vec{r}\}$ formino una terna levogira o destrogira".