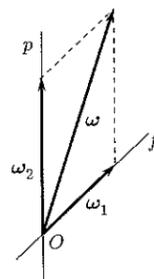


cosicché le due rigate  $L$  e  $\Lambda$  si riducono a due coni di vertice  $O$  (coni del POIN-SOT), tangenti ad ogni istante lungo una generatrice, variabile su entrambi (asse di moto); e, poiché qui viene a mancare costantemente lo strisciamento elementare lungo codesto asse, si conclude che: *Ogni moto di un sistema rigido intorno ad un punto fisso  $O$  avviene come se un certo cono, solidale col sistema dato ed avente il vertice in  $O$ , rotolasse senza strisciare su di un cono fisso di egual vertice.*

**15** Un notevole esempio di moti rigidi intorno ad un punto fisso è fornito dalle cosiddette *precessioni regolari*. Esse possono definirsi, in relazione alla teoria dei moti



relativi dei sistemi rigidi (n. 5), nei termini seguenti. Si immagini che un sistema rigido  $S$  ruoti uniformemente intorno ad un asse  $f$  solidale con esso, il quale alla sua volta, mantenendosi incidente e solidale ad un asse fisso  $p$ , ruoti uniformemente intorno a quest'ultimo. Dicesi *precessione regolare* il moto assoluto di  $S$ , generato dal moto di trascinamento di  $f$  intorno a  $p$  e dal moto relativo di  $S$  intorno ad  $f$  (l'uno e l'altro uniformi). L'asse  $p$ , fisso nello spazio, dicesi *asse di precessione*; l'asse  $f$ , fisso nel corpo, *asse di figura*; e il punto fisso  $O$ , comune a codesti due assi, chiamasi *polo* della precessione.

La precessione risulta individuata quando sia dato (nello spazio e nel sistema rigido) il polo  $O$  e siano assegnate le velocità angolari dei due moti generatori, l'una costante nello spazio, l'altra costante nel sistema rigido. Se  $\omega_1$  è la velocità di  $S$  intorno ad  $f$  ed  $\omega_2$  quella di  $f$  intorno a  $p$ , la velocità angolare  $\omega$  dell'atto di moto rotatorio della precessione regolare è data ad ogni istante da

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

cosicché in una precessione regolare la velocità angolare si presenta ad ogni istante come somma di due vettori di lunghezza costante, l'uno solidale col sistema rigido, l'altro fisso nello spazio.

Viceversa è facile riconoscere che questa proprietà caratterizza, fra i moti rigidi con un punto fisso, le precessioni regolari, onde può essere assunta come una nuova definizione di esse. Invero se, nel moto di un sistema rigido intorno ad un punto fisso  $O$ , la velocità angolare  $\omega$  è, ad ogni istante, la somma geometrica di due vettori  $\omega_1, \omega_2$  di lunghezza costante, soddisfacenti alle condizioni del precedente enunciato, le linee di azione  $f$  e  $p$ , di codesti due vettori  $\omega_1, \omega_2$ , supposti applicati in  $O$ , risultano l'una solidale col sistema, l'altra fissa nello spazio, cosicché il dato moto rigido si può immaginar generato, come una precessione regolare, dai moti rotatori uniformi di assi  $f$  e  $p$  e di velocità angolari  $\omega_1, \omega_2$  rispettivamente.

**16** Durante la precessione regolare, il parallelogrammo di  $\omega_1, \omega_2$ , supposti applicati in  $O$ , pur rotando uniformemente intorno al suo lato disposto lungo la  $p$ , conserva inalterata, per la costanza di  $\omega_1$  ed  $\omega_2$ , la sua configurazione, cosicché in particolare risulta costante il prodotto scalare

$$\omega_1 \times \omega_2.$$

Inoltre discende di qui che la diagonale di codesto parallelogrammo, la quale fornisce istante per istante la linea d'azione della velocità angolare  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  della precessione, cioè il rispettivo asse di moto, si mantiene inclinata di un angolo costante tanto sulla  $f$ , quanto sulla  $p$ ; onde si conclude che: *in una precessione regolare entrambi i coni del POIN-SOT sono rotondi.*

**17** Le precessioni regolari, per cui la costante scalare  $\omega_1 \times \omega_2$  non sia nulla, si chiamano *progressive* o *retrograde*, secondo che codesta costante è positiva o negativa, cioè, secondo che le due velocità angolari  $\omega_1, \omega_2$  (supposte non ortogonali) formano fra loro un angolo acuto od ottuso.

Nel primo caso, ciascuna di esse ha lo stesso verso del componente dell'altra nella sua direzione; mentre nel secondo caso accade l'opposto. E ciò spiega le due designazioni di *progressiva* e di *retrograda*.

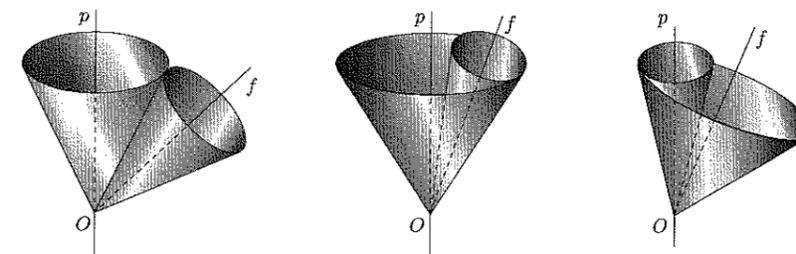
Fissata ad arbitrio una orientazione su ciascuno dei due assi  $p$  ed  $f$  di precessione e di figura e designati con  $\kappa$  e  $k$  i rispettivi vettori unitari, si avrà

$$\omega_1 = \mu k, \quad \omega_2 = \nu \kappa$$

dove  $\mu$  e  $\nu$  denotano due scalari, ognuno dei quali sarà positivo o negativo secondo il verso destro o sinistro della rispettiva rotazione intorno al corrispondente asse orientato. Di qui risulta  $\omega_1 \times \omega_2 = \mu\nu \cos \theta_0$ , dove  $\theta_0$  designa l'angolo dei due versori  $\kappa$  e  $k$ , ed è il segno di questo prodotto di tre fattori, che discrimina le due specie di precessioni.

Nel caso escluso dappprincipio, di  $\theta_0 = \pi/2$  ( $f$  e  $p$  fra loro ortogonali) il criterio cade in difetto e la precessione si può considerare indifferentemente progressiva o retrograda.

**18** Un'altra classificazione delle precessioni regolari si ha, considerando il mutuo comportamento, durante il moto, dei due coni rotondi del POIN-SOT. Quando essi si considerino costituiti di rette intere, sono possibili evidentemente tre casi (oltre quelli di degenerazione di uno dei due coni in un piano): o di due coni sono l'uno esterno all'altro; o il cono mobile è interno al cono fisso; o il cono fisso è interno al cono mobile.



Senza intrattenerci sui criteri per distinguere queste varie eventualità osserviamo piuttosto che in ogni caso, ove si introducano gli angoli di EULERO (3, nn. 25-27) prendendo per origine il polo della precessione e come assi  $\zeta$  e  $z$  della terna fissa

e della terna mobile le rette orientate  $p$  ed  $f$  il cui angolo è  $\theta_0$ , la  $\psi = \widehat{\xi N}$  dà l'anomalia della linea dei nodi  $N$  sul piano ortogonale in  $O$  alla  $\zeta \equiv p$  e la  $\varphi = \widehat{Nx}$  dà l'anomalia della  $x$  sul piano ortogonale in  $O$  alla  $z \equiv f$ , talché si avrà

$$(17) \quad \dot{\varphi} = \mu, \quad \dot{\psi} = \nu.$$

Di qui, integrando, si deduce che le equazioni della precessione regolare sono

$$(18) \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \mu t + \varphi_0, \quad \psi = \nu t + \psi_0,$$

dove  $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$  denotano gli angoli di EULERO della posizione iniziale del sistema rigido. È poi manifesto che, reciprocamente, le tre equazioni ora scritte definiscono una precessione regolare che ha  $O\zeta$  per asse di precessione e  $Oz$  per asse di figura.

**19 Precessione regolare della Terra** Un notevole esempio di precessione regolare è fornito dal moto della Terra intorno al suo centro  $O$ ; ed anzi storicamente risale a questo moto particolare l'origine dello stesso nome di precessione.

Si sa dalla Cosmografia elementare che la Terra ruota uniformemente intorno al suo asse polare  $f$  nel verso sinistro o antiorario (cioè nel verso da Ovest ad Est per Sud, opposto a quello del moto apparente del Sole) descrivendo un intero giro in un giorno (siderale). Ma l'asse polare terrestre  $f$  non conserva (rispetto alle stelle fisse) direzione invariabile, bensì ruota alla sua volta uniformemente (per quanto con estrema lentezza) intorno ad una retta  $p$  di direzione fissa, pel centro terrestre  $O$ , la quale si può caratterizzare come ortogonale al piano della eclittica (cioè dell'orbita ellittica descritta dalla Terra, secondo le leggi del KEPLER, nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole). L'angolo costante (minimo) delle due rette (non ancora orientate)  $f$  e  $p$  è di circa  $23^\circ 30'$ . Immaginiamo orientata la  $f$  dal centro  $O$  della Terra verso il polo boreale, e la  $p$  in modo da formare colla semiretta positiva della  $f$  l'angolo *acuto* suindicato. Le osservazioni astronomiche più antiche, poste a raffronto con quelle degli ultimi secoli, hanno mostrato che l'asse terrestre  $f$  ruota attorno all'asse  $p$  (orientato, come si è ora convenuto) in verso concorde al verso orario (cioè da Est ad Ovest) descrivendo un intero giro nel periodo di circa 26 000 anni (siderali), che prende il nome di *anno platonico*.

La precessione regolare è con ciò definita.

La rotazione della Terra intorno ad  $f$  appare destra, quella di  $f$  intorno a  $p$  sinistra, talché intanto la precessione è *retrograda*. Inoltre, se prendiamo come unità di tempo il giorno (siderale), cosicché l'anno platonico risulta all'incirca di giorni

$$366 \times 26\,000,$$

ossia, modificando ulteriormente, per maggiore semplicità, le cifre, di giorni

$$360 \times 25\,000 = 9 \cdot 10^6,$$

otteniamo per le componenti  $\mu$  e  $\nu$  delle velocità  $\omega_1, \omega_2$ , secondo le orientazioni rispettivamente assunte su  $f$  e su  $p$ , i valori

$$(19) \quad \mu = 2\pi, \quad \nu = -\frac{2\pi}{9 \cdot 10^6},$$

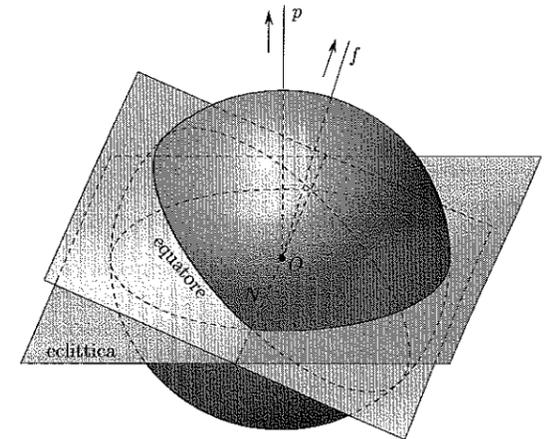
onde risulta l'estrema piccolezza del rapporto  $\omega_1/\omega_2$  dei valori assoluti delle due velocità, che è a un dipresso dell'ordine di grandezza di  $10^{-7}$ .

Componendo le  $\omega_1 = \mu k, \omega_2 = \nu \kappa$  si ottiene come linea d'azione della  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , cioè come asse di moto della precessione, una retta orientata  $m$ , esterna all'angolo  $\widehat{fp}$  e inclinata su  $f$  di un angolo piccolissimo (di  $0''$ , 00867; cfr. es. n. 7); cosicché il cono mobile del POINSOT, di apertura piccolissima rotola internamente al cono fisso, di apertura lievemente superiore a  $23^\circ 30'$ . In prima approssimazione, per la estrema piccolezza di  $|\nu|$  rispetto a  $\mu$ , cioè per la lentezza del moto di trascinarsi di fronte a quello di rotazione propria, è lecito considerare (come si fa abitualmente) il movimento terrestre quale una semplice rotazione intorno all'asse polare, riguardando fissa la orientazione di questo nello spazio. In realtà, per moltissimi anni e anche per qualche secolo la rotazione di  $f$  attorno a  $p$  rimane pressoché inavvertibile. Ma coi millenni essa diventa rilevabile alle osservazioni astronomiche, cosicché per es. certe costellazioni, ora visibile soltanto nell'emisfero australe, lo furono in tempi remoti (diciamo 3000 anni or sono) nelle regioni mediterranee, come risulta da passi biblici ed omerici.

**20 Precessione degli equinozi** Risulta immediatamente da quanto precede la spiegazione cinematica di questo fenomeno astronomico.

Come si è detto al n. prec., l'eclittica non è altro che il piano su cui ad un osservatore terrestre sembra avvenire il moto annuo (kepleriano ed anzi, grossolanamente, circolare uniforme) del Sole, da cui dipende l'avvicinarsi delle stagioni. Consideriamo d'altra parte il piano equatoriale terrestre (piano *fisso* per  $O$  perpendicolare ad  $f$ ), e sia (n. 18)  $N$  la sua intersezione col piano dell'eclittica. Il Sole, in questo moto che (n. prec.) è sinistro rispetto all'orientazione assunta su  $p$ , attraversa una volta all'anno la semiretta positiva  $N$ . L'epoca di tale passaggio costituisce l'*equinozio di primavera*, mentre naturalmente l'intersezione colla semiretta opposta corrisponde all'equinozio di autunno. Dicesi in conformità *linea degli equinozi* l'intera retta  $N$ , cioè, se si vuole, la linea dei nodi nel sistema di riferimento che, per gli angoli di EULERO, si è fissato al n. 18.

Come risulta dalla seconda delle (18), codesta linea degli equinozi ruota sul piano dell'eclittica con velocità angolare  $\dot{\psi} = \nu$ , onde si rileva dalla seconda delle (19) che codesto moto è lentissimo, e per anni ed anni la retta  $N$  si può riguardare sensibilmente immobile. Ma nei secoli il moto di  $N$  diventa apprezzabile; e poiché, essendo  $\nu < 0$ , esso ha verso sinistro rispetto alla  $p$  e alla  $f$  (orientate



verso l'emisfero boreale della Terra), cioè il verso orario, dà luogo ad un anticipo o precessione degli equinozi, per cui ad intervalli di 13000 anni siderali (mezzo anno platonico) si determina un completo capovolgimento delle condizioni di temperatura, caratteristiche delle singole stagioni.

### 8 Determinazione di un moto rigido date le caratteristiche

**21** Dato un moto rigido, sappiamo in ogni caso determinare, con sole operazioni di derivazione, i due vettori puramente temporali  $v_0$ , ed  $\omega$ , che abbiamo chiamato *caratteristici*, in quanto permettono di assegnare esplicitamente, istante per istante, la espressione tipica dell'atto di moto rigido (3, n. 16). Qui, a complemento della Cinematica dei solidi, ci occuperemo, pur rapidamente, del problema inverso, cioè della determinazione di un moto rigido, quando ne siano conosciuti in funzione del tempo i vettori caratteristici.

Questo problema si presenta sotto due diversi aspetti, secondo che i vettori  $v_0$  ed  $\omega$  si suppongono assegnati (in funzione del tempo) rispetto agli assi fissi  $\Omega\xi\eta\zeta$  o rispetto agli assi mobili  $Oxyz$ . In entrambi i casi lo scopo è di risalire alla determinazione delle quattro funzioni geometriche  $O(t)$ ,  $i(t)$ ,  $j(t)$ ,  $k(t)$  (origine e versori fondamentali della terna mobile) che, come si è visto fin dalla impostazione della Cinematica dei solidi (3, n. 1) individuano completamente il moto rigido.

Noi qui esamineremo dapprima il caso in cui i vettori caratteristici  $v_0$ , ed  $\omega$  si suppongono conosciuti con riferimento alla terna mobile, il che formalmente significa che si riguardano note in funzione di  $t$  le rispettive componenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

A prima vista parrebbe che l'impostazione più naturale della questione si avesse supponendo note le caratteristiche rispetto alla terna fissa, ma in molti casi è il riferimento solidale col corpo mobile quello che permette di cogliere più rapidamente l'andamento generale del moto.

**22** In un primo tempo ci occuperemo del caso particolare, in cui il solido si muove intorno ad un punto fisso, che assumeremo come origine comune  $\Omega \equiv O$  delle due terne; cosicché tutto si ridurrà a determinare in funzione del tempo la orientazione mutua dei due triedri. Questa orientazione, come si è ricordato or ora, è individuata dai tre versori fondamentali  $i$ ,  $j$ ,  $k$  degli assi mobili; ma naturalmente si può anche pensare determinata dai tre versori della terna  $\Omega\xi\eta\zeta$  (rispetto ad  $Oxyz$ ), in quanto in ogni caso le componenti sono complessivamente fornite dai nove coseni direttori

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array}$$

presi la prima volta per righe, la seconda per colonne.

In base a questa osservazione la soluzione del nostro problema si può ricondurre alla determinazione del modo di variare rispetto alla terna  $Oxyz$  di un generico vettore  $w$  fisso, cioè solidale colla terna  $\Omega\xi\eta\zeta$ ; giacché poi non si avrà che da far coincidere codesto vettore successivamente coi tre versori fondamentali di codesta terna fissa, per averne, istante per istante, i nove coseni direttori.

Un generico vettore fisso  $w$  è caratterizzato, nelle notazioni del n. 10, dall'equazione differenziale

$$\frac{d_a w}{dt} = 0,$$

la quale, ove si designi con  $\omega$  la velocità angolare del solido e con  $\dot{w}$  la derivata con riferimento agli assi mobili, assume la forma

$$(20) \quad \dot{w} + \omega \wedge w = 0.$$

Proiettando sugli assi mobili e denotando al solito le componenti di  $\omega$  con  $p$ ,  $q$ ,  $r$  (funzioni note del tempo, che qui supporremo univalenti, continue, derivabili) otteniamo il sistema del 1° ordine

$$(20') \quad \begin{array}{l} \text{NON} \\ \text{VETTORIALE} \\ \text{NON-SCALARI} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{w}_x = r w_y - q w_z, \\ \dot{w}_y = p w_z - r w_x, \\ \dot{w}_z = q w_x - p w_y, \end{array} \right.$$

che qui si tratterebbe di integrare.

Siffatta integrazione non si sa in generale eseguire; ma, con una opportuna scelta di variabili, si può precisare la difficoltà del problema, mettendo simultaneamente in luce i casi più notevoli, in cui esso è riducibile alle quadrature.

**23** La circostanza che il vettore  $w$  è fisso, e quindi conserva lunghezza invariabile nel tempo, si traduce pel sistema (20') nell'integrale primo

$$w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \text{cost},$$

che del resto si può trarre direttamente dalle (20') stesse con un ovvio artificio (moltiplicandole rispettivamente per  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  e sommandole membro a membro); e la costante a secondo membro si riduce ad 1, se il vettore fisso di cui si tratta si suppone unitario.

L'equazione

$$(21) \quad w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1,$$

che così si ottiene, suggerisce appunto una particolare scelta di variabili che permette di ridurre il problema di integrazione del sistema (20') ad un problema a due sole funzioni incognite.

A tale scopo si osservi che se il vettore unitario  $w$  si immagina applicato nell'origine  $O$ , il suo estremo libero  $P$  (di coordinate  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ ), si muove, rispetto alla terna  $Oxyz$ , sulla sfera di centro  $O$  e raggio 1, talché la posizione di  $P$ , ciò che è lo stesso, la terna  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ , delle sue coordinate si potrà esprimere per mezzo di una qualsiasi coppia di coordinate gaussiane sulla sfera, in particolare dei parametri  $\lambda$ ,  $\mu$  delle due schiere di generatrici complesse (o coordinate simmetriche). Come è ben noto, codeste due schiere si mettono in evidenza scrivendo la (21) sotto la forma

$$(w_x + iw_y)(w_x - iw_y) + (w_z + 1)(w_z - 1) = 0,$$