11.1 La matrice d'inerzia

Si consideri l'applicazione da $V \times V$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$I(\underline{w}, \underline{u}) = \sum_{i=1}^{N} \{(P_i - O) \wedge m_i [\underline{w} \wedge (P_i - O)]\} \cdot \underline{u} .$$

Ovviamente, nel caso continuo bisogna sostituire m_i con $\rho d\rho$ e la sommatoria con l'integrale esteso. É importante verificare che $I(\underline{w}, \underline{u})$ definisce un prodotto scalare; a tal fine si nota che

$$\begin{aligned} I(\underline{w}, \underline{u}) &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ (P_i - O)^2 \underline{w} - [(P_i - O) \cdot \underline{w}] (P_i - O) \right\} \cdot \underline{u} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)^2 \underline{w} \cdot \underline{u} - \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(P_i - O) \cdot \underline{w} \right] \left[(P_i - O) \cdot \underline{u} \right] \end{aligned} \tag{11.1}$$

da cui segue $I(\underline{w}, \underline{u}) = I(\underline{u}, \underline{w})$, ovvero la prima proprietá dei prodotti scalari. Anche le proprietá $aI(\underline{w}, \underline{u}) = I(a\underline{w}, \underline{u}) = I(\underline{w}, a\underline{u})$ e $I(\underline{w}, \underline{u} + \underline{v}) = I(\underline{w}, \underline{u}) + I(\underline{w}, \underline{v})$ sono soddisfatte. Riguardo all'ultima proprietá, si noti che

$$\begin{aligned} I(\underline{u}, \underline{u}) &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i [\underline{u} \wedge (P_i - O)] \cdot \underline{u} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{u} \wedge (P_i - O) \cdot [\underline{u} \wedge (P_i - O)] = \sum_{i=1}^{N} m_i [\underline{u} \wedge (P_i - O)]^2 \geq 0 , \end{aligned} \tag{11.2}$$

per cui se $I(\underline{u}, \underline{u}) = 0$ allora

$$\underline{u} \wedge (P_i - O) = \underline{0} \tag{11.3}$$

e si possono presentare tre casi:

- *I punti P_i non sono allineati con O.* Dall'equazione (11.3) segue $\underline{u} = \underline{0}$ per cui é soddisfatta l'ultima proprietá del prodotto scalare, anzi la proprietá degli spazi vettoriali euclidei. La matrice associata a tale prodotto scalare, nella base ortonormale $\underline{e}_h$ (secondo il prodotto scalare ordinario) é, per (11.1)

$$I_{hk} = I(\underline{e}_h, \underline{e}_k) = \sum_{i=1}^{N} m_i (x^2 + y^2 + z^2) \delta_{hk} - \sum_{i=1}^{N} m_i [(P_i - O) \cdot \underline{e}_h] [(P_i - O) \cdot \underline{e}_k] ,$$

ovvero $I_{11} = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) = A$, $I_{12} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i = C'$, $I_{13} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i = B'$, $I_{22} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) = B$, $I_{23} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i = A'$, $I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) = C$ e viene chiamata **matrice d'inerzia**.

- *I punti P_i sono allineati con O, ma ce ne é almeno uno distinto da O.* In questo caso si ha $P_i - O = \lambda_i \underline{r}$ con $\underline{r} \neq \underline{0}$ ed almeno un $\lambda_i \neq \underline{0}$. Si ha $I(\underline{r},\underline{u}) = \underline{0} \quad \forall \underline{u}$ e pertanto I non definisce, in questo caso, un prodotto scalare; nonostante ció si puó definire ugualmente la matrie d'inerzia come la I_{hk} del caso precedente. Se si prende come asse delle x la retta passante per O e parallela a $\underline{r}$, si ha $P_i \equiv (x_i, 0, 0)$ e perció si trova $I_{11} = I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0, \quad I_{22} = I_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)^2$, cioé la matrice d'inerzia ha la forma diagonale, un autovalore nullo semplice e uno non nullo doppio.

- *I punti P_i sono tali che $P_i \equiv O$.* Allora $I(\underline{w},\underline{u}) = \underline{0}\ \forall \underline{u}$ e $\forall \underline{w}$. La matrice d'inerzia sopra definita é la matrice nulla.

La quadrica di equazione $I_{hk} X_h X_k = \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)^2$ viene chiamata *quadrica d'inerzia*. Nel primo caso essa é un ellissoide reale (giacché I_{hk} é definita positiva), nel secondo caso é un cilindro reale di equazione $z^2 + y^2 = 1$, nel riferimento che, in questo stesso caso, si era fissato. Nel terzo caso non é definita.

Se si cambia base con la legge $\underline{e}_{h'} = A^h{}_{h'} \underline{e}_h$, si ha

$$I_{h'k'} = I(\underline{e}_{h'}, \underline{e}_{k'}) = I(A^h{}_{h'} \underline{e}_h, A^k{}_{k'} \underline{e}_k) = A^h{}_{h'} A^k{}_{k'} I_{hk}\,. \tag{11.4}$$

Quest'ultima equazione ci dice come varia la matrice d'inerzia. Ovviamente, la matrice d'inerzia dipende anche dal punto O introdotto nella sua definizione, per cui sarebbe piú corretto indicarla con I^O; l'apice O viene omesso per semplicitá quando ció non dá luogo a confusione. É allora interessante vedere come si trasforma I quando si cambia il punto O mantenendo inalterata la base $\{\underline{e}_i\}$. Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}
I^O(\underline{w},\underline{u}) &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - O' + O' - O) \wedge m_i \left[\underline{w} \wedge (P_i - O' + O' - O)\right] \cdot \underline{u} = \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O') \wedge \left[\underline{w} \wedge (P_i - O')\right] \cdot \underline{u} + \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O') \wedge \left[\underline{w} \wedge (O' - O)\right] \cdot \underline{u} + \\
&+ \sum_{i=1}^{N} m_i (O' - O) \wedge \left[\underline{w} \wedge (P_i - O')\right] \cdot \underline{u} + \sum_{i=1}^{N} m_i (O' - O) \wedge \left[\underline{w} \wedge (O' - O)\right] \cdot \underline{u} = \\
&= I^{O'}(\underline{w},\underline{u}) + m(G - O') \wedge \left[\underline{w} \wedge (O' - O)\right] \cdot \underline{u} + m(O' - O) \wedge \left[\underline{w} \wedge (G - O')\right] \cdot \underline{u} + \\
&+ m(O' - O) \wedge \left[\underline{w} \wedge (O' - O)\right] \cdot \underline{u} \quad .
\end{aligned} \tag{11.5}$$