Teorema 12. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $\underline{F}(P)$ sia conservativa é che l'integrale curvilineo di $\underline{F}(P) \cdot dP$, esteso a una qualunque curva chiusa, sia nullo.*

Analoghe proprietá si possono definire per la sollecitazione, in particolare, la sollecitazione $Q_h(\underline{q})$ si dice conservativa di potenziale $U(\underline{q})$ se risulta $Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}$.
Anche le altre proprietá si estendono formalmente a questo caso; per esempio, le condizioni di integrabilitá sono $\frac{\partial Q_h}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_h}$. Sussiste anche il seguente

Teorema 13. *Se tutte le forze $(\underline{F}_i, P_i)$ di un sistema sono conservative di potenziale U_i, allora anche la sollecitazione é conservativa di potenziale $U = \sum_i U_i$.*

Dimostrazione. Infatti si ha, $Q_h = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_{i=1}^N U_i$. □

Di questo teorema non é vero il viceversa, come risulta dal seguente esempio. Si consideri il sistema di forze $-k(P_1 - P_2), P_1$ e $-k(P_2 - P_1), P_2$; ciascuna di esse non é conservativa; per esempio, la forza applicata in P_1 non dipende solo dalla posizione di P_1, ma anche da quella di P_2. Peró la sollecitazione é

$$Q_h = -k(P_1 - P_2) \cdot \frac{\partial P_1}{\partial q_h} - k(P_2 - P_1) \cdot \frac{\partial P_2}{\partial q_h} = -k(P_1 - P_2) \cdot \left(\frac{\partial P_1}{\partial q_h} - \frac{\partial P_2}{\partial q_h}\right) = -k(P_1 - P_2) \cdot \frac{\partial}{\partial q_h}(P_1 - P_2) = \frac{\partial}{\partial q_h}\left[-\frac{k}{2}(P_1 - P_2)^2\right] = \frac{\partial U}{\partial q_h} \text{ con } U = -\frac{k}{2}(P_1 - P_2).$$

Diamo un elenco delle forze e sollecitazioni conservative piú ricorrenti:

1. **Forza costante** $(\underline{F}, P)$; $U = \underline{F} \cdot (P - O)$, con O punto fisso scelto a piacere;

2. **Forza peso** $(m\underline{g}, P)$; $U = m\underline{g} \cdot (P - O)$, con O punto fisso scelto a piacere;

3. **Forza elastica** con centro O fisso $(-k(P - O), P)$; $U = \frac{-k}{2}(P - O)^2$;

4. **Forza elastica** $(-k(P - \overline{P}), P)$, con $\overline{P}$ proiezione ortogonale di P su una retta fissa; $U = \frac{-k}{2}(P - \overline{P})^2$;

5. **Forza centrifuga** nel moto rotatorio uniforme attorno alla retta r;

- per ogni punto $m\omega^2(P-\overline{P})$, $\quad U = m\frac{\omega^2}{2}(P-\overline{P})^2$,
- per tutto il sistema $m_i\omega^2(P_i-\overline{P}_i)$; $\quad U = \frac{1}{2}I_r\omega^2$;

6. **Forza centrale** $(f(\rho)\frac{P-O}{\rho}, P)$, di centro O con $(\rho = \overline{PO})$; $\quad U = \int f(\rho)d\rho$;

7. **Forze elastiche** $(-k(P_1-P_2), P_1)$, $(-k(P_2-P_1), P_2)$; $\quad U = -\frac{k}{2}(P_1-P_2)^2$;

8. **Forze centrali** $(\underline{F} = f(\rho)\frac{P_1-P_2}{\rho}, P_1)$ e $(-\underline{F}, P_2)$ con $\rho = \overline{P_1P_2}$; $\quad U = \int f(\rho)d\rho$.

Per una rapida verifica di tali risultati, conviene fare ricorso alla proprietá $dL = dU$. In particolare per il quarto elemento della lista di sopra si ha

$dL = -k(P-\overline{P})\cdot dP = -k(P-\overline{P})\cdot d(P-\overline{P}) = d[-\frac{k}{2}(P-\overline{P})^2]$;

dove si é sfruttata la proprietá $(P-\overline{P})\cdot d\overline{P} = 0$. Per quanto riguarda il sesto elemento della lista si ha

$dL = f(\rho)\frac{P-O}{\rho}\cdot dP = \frac{f(\rho)}{\rho}(P-O)\cdot d(P-O) = \frac{f(\rho)}{2\rho}d(P-O)^2 = \frac{f(\rho)}{2\rho}d\rho^2 = f(\rho)d\rho = d\int f(\rho)d\rho$.

14.1 Integrale dell'energia.

Si definisce potenza π della forza $\underline{F}_i$ applicata in P_i, lo scalare $\pi = \sum_{i=1}^{n}\underline{F}_i\cdot\underline{v}_{P_i}$, ovvero $\pi = \sum_{i=1}^{n}\underline{F}_i\cdot\frac{dP_i}{dt}$, cioé il lavoro compiuto nell'unitá di tempo. Sussiste il seguente

Teorema 14. *(Teorema dell'energia) Per un sistema a vincoli olonomi, bilaterali, lisci si ha $\frac{dT}{dt} = \pi^a$, cioé la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica é uguale alla potenza delle forze attive.*

Dimostrazione. Da $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\underline{v}_i^2$, si ha $\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\underline{v}_i\cdot\underline{a}_i = \sum_{i=1}^{N}\underline{F}_i\cdot\underline{v}_i = \pi^a + \pi^v = \pi^a$ in quanto $\pi^v = \frac{dL^v}{dt} = 0$. □

Se la sollecitazione é conservativa, si ha $dL^a = dU$ da cui $\pi^a = \frac{dL^a}{dt} = \frac{dU}{dt}$ e l'integrale dell'energia diventa $\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$, ovvero $T - U = E$ (**integrale dell'energia**); posto $V = -U$ (energia potenziale), esso diventa $T + V = E$, cioé la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale é una costante, chiamata **energia totale**.