STABILITA' SECONDO LJAPUNOV

Sia S un sistema olonomo ad n gradi di libertà, a vincoli perfetti (bilaterali), indipendenti dal tempo, e sottoposto ad una sollecitazione conservativa, di cui denoteremo con $U(q) \equiv U(q_1, \dots, q_n)$ il potenziale, che per ipotesi supporremo dipendere dalle sole q, e che, nel campo che si considera, si supporrà, come al solito, uniforme continuo e regolare insieme con le sue derivate prime e seconde.
Già sappiamo che se la funzione $U(q)$ per una speciale determinazione q^* delle q, cioè per una data configurazione C^* del sistema, ammette un valore stazionario (in particolare un massimo o un minimo), talchè si annullino le componenti lagrangiane Q_h della sollecitazione, la C^* è per il sistema una configurazione di equilibrio.
Siamo ora in grado di discutere in modo completo la ***stabilità*** di tale stato di equilibrio

* * *

Dato un sistema olonomo S ad n gradi di libertà, a vincoli perfetti (bilaterali), indipendenti dal tempo, e sottoposto ad una sollecitazione conservativa; sia $C^*\left(q_h = q_h^*, \quad h = 1,2,\dots,n \right)$ una <u>configurazione di equilibrio,</u> occupata all'istante t_0, dal sistema S con velocità lagrangiane tutte nulle, e sia $P^*\left(q_h = q_h^*, \dot{q}_h = 0\right)$ il punto rappresentativo di tale stato di equilibrio nello *spazio* $A^{2n} \equiv S^{2n}$ *degli atti di moto (o degli stati cinetici)*.

<u>Definizione di stabilità secondo Ljapunov</u>:
La configurazione di equilibrio C^* si dice ***stabile secondo Ljapunov***, se comunque si prenda una ipersfera Σ_ε di centro P^* e raggio $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, si può determinare in corrispondenza di essa un'altra ipersfera Σ_η, concentrica alla Σ_ε, di raggio $0 < \eta < \varepsilon$, tale che qualunque sia la posizione perturbata $P_0 \neq P^*$ - rappresentativa dell'atto di moto del sistema all'istante iniziale t_0 - interna alla ipersfera Σ_η, il punto P - rappresentativo dell'atto di moto del sistema al generico istante t - per $t > t_0$ resta indefinitamente entro l'ipersfera Σ_ε.

* * *

<u>Definizione di instabilità secondo Ljapunov</u>:
La configurazione di equilibrio C^* si dice ***instabile secondo Ljapunov***, se entro ogni ipersfera di centro P^* e raggio comunque piccolo η esiste sempre almeno un punto P_0, a partire dal quale il punto P finisce con l'uscire da una ipersfera concentrica *di raggio indipendente da* η.

N.B. STATO CINETICO = ATTO DI MOTO

TEOREMA DI DIRICHLET - LAGRANGE (*Criterio sufficiente di stabilità*):
Dato un sistema olonomo S ad n gradi di libertà, a vincoli perfetti, indipendenti dal tempo, e sottoposto ad una sollecitazione conservativa, se in una data configurazione $C^* \equiv (q_1^*,\dots,q_n^*)$ l'energia potenziale $V(q_1,\dots,q_n)$ ammette un minimo relativo proprio, tale configurazione è, per il sistema, di equilibrio stabile.

Dimostrazione:
Senza perdere di generalità, supponiamo che la configurazione C^*, nella quale l'energia potenziale $V(q)$ ammette un minimo isolato, sia $q_h^* = 0 \quad (h = 1,2,\dots,n)$[1] ed inoltre, dato che V è definita a meno di una costante additiva arbitraria, disponendo di quest'ultima, possiamo fare in modo che $V(0,0,\dots,0) = 0$. Poiché nella sudetta posizione l'energia potenziale ha per ipotesi un minimo isolato, le derivate parziali di V, rispetto alle coordinate lagrangiane, sono ivi nulle, e perciò sono nulle le forze generalizzate:

$$Q_h(q^*) = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_h}\right)_{q_h^*=0} = 0, \qquad (h = 1,2,\dots,n).$$

Dunque, per la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio dei sistemi olonomi, tale posizione C^* è di equilibrio per il sistema. Vogliamo dimostrare che si tratta precisamente di una posizione di equilibrio stabile (secondo Ljapunov).
A tale scopo, per dare alle nostre considerazioni una forma più rapida ed espressiva converrà avvalersi dello spazio degli atti di moto A^{2n} nel quale il punto rappresentativo dello stato di equilibrio, cade, per le ipotesi fatte, nell'origine O di tale spazio (cfr. fig.1). Indichiamo sinteticamente con $P \equiv (q, \dot{q})$ un generico punto rappresentativo dello stato cinetico di S, cioè $P \in A^{2n}$, e cominciamo con l'osservare che l'energia totale del sistema, valutata in P:

$$H(P) \equiv H(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) + V(q) = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(q)\dot{q}_h\dot{q}_k + V(q) \tag{1}$$

considerata come una funzione continua delle q, $\dot{q}$, ha nel punto $O \in A^{2n}$ un minimo relativo proprio. Infatti, in tale punto, è per ipotesi $V(O) = 0$ ma anche $T(O) = 0$ e perciò $H(O) = 0$, inoltre in punti P abbastanza vicini ad O è $V(P) > 0$, ed essendo l'energia cinetica definita positiva è anche $T(P) > 0$. Perciò se Ω è un intorno abbastanza piccolo di O nel quale si fa sentire il minimo di V, cioè tale che $V(P) > 0$, $\forall P \in \Omega - \{O\}$, avremo:

$$H(P) > 0, \qquad \forall P \in \Omega - \{O\}. \tag{2}$$

---

[1] Se la posizione di equilibrio fosse caratterizzata da coordinate lagrangiane non tutte nulle $q_h^* \neq 0$ basterebbe fare un cambiamento di coordinate (traslazione) $q'_h = q_h - q_h^*$ per ridursi al caso $q'_h = 0$.

Prendiamo ora un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere e tale che l'intorno ipersferico $\Sigma_\varepsilon(O)$, di centro O e raggio ε, sia tutto interno ad Ω, e diciamo Q un punto qualunque della frontiera di $\Sigma_\varepsilon(O)$, cioè $Q \in \partial\Sigma_\varepsilon(O)$. Siccome tale frontiera è un insieme chiuso e limitato di A^{2n} e la $H(q,\dot{q})$ è una funzione ivi continua e positiva, essa per il teorema di Weierstrass, ammette un minimo assoluto positivo[2]:
cioè esiste qualche punto $\widetilde{Q} \in \partial\Sigma_\varepsilon$ tale che:

$$H(\widetilde{Q}) = \mu = \min H(Q) > 0, \qquad \forall Q \in \partial\Sigma_\varepsilon \tag{3}$$

il che significa

$$H(Q) \geq \mu > 0, \qquad \forall Q \in \partial\Sigma_\varepsilon. \tag{4}$$

Fissiamo poi un qualsiasi numero positivo $0 < \mu' < \mu$ e notiamo che, per la continuità di $H(q,\dot{q})$ rispetto ai suoi $2n$ argomenti $q, \dot{q}$, esiste certamente un intorno ipersferico $\Sigma_\eta(O)$, di centro O e raggio η (con $0 < \eta < \varepsilon$), abbastanza piccolo perché si abbia:

$$0 < H(P_0) \leq \mu', \qquad \forall P_0 \in \Sigma_\eta - \{O\}. \tag{5}$$

Ora questo $\Sigma_\eta(O)$ è appunto un intorno ipersferico di O del tipo di quello richiesto nella definizione di stabilità secondo Ljapunov. Invero, se lo stato cinetico iniziale perturbato è rappresentato dal punto $P_0 \in \Sigma_\eta - \{O\}$, con che in quel primo istante t_0 sussiste la (5), la funzione $H(P)$, per la validità dell'integrale dell'energia

$$H(P) = T + V = \text{cost.} = E,$$ costante

conserva durante tutto il moto del sistema il suo valore iniziale $H(P_0)$, cioè, per la (5):

$$H(P) = H(P_0) \leq \mu', \qquad \forall t \geq t_0. \tag{6}$$

Ne consegue che il punto P - rappresentativo dello stato cinetico del sistema ad un generico istante t – non può mai uscire dall'ipersfera Σ_ε, giacchè per uscirne dovrebbe attraversare la sua frontiera in un qualche punto $\overline{Q}$, nel quale, per la (4), si avrebbe $H(\overline{Q}) \geq \mu$, ed essendo $\mu > \mu'$ si avrebbe

$$H(\overline{Q}) > \mu'. \tag{7}$$

Ciò sarebbe in contraddizione con la (6) ovvero con il principio di conservazione dell'energia.
Risulta così soddisfatta la definizione dinamica di stabilità secondo Ljapunov, e perciò C^*, rappresentata dal punto O, è per il sistema una posizione di equilibrio stabile. c.d.d.

[2] Ovviamente la funzione $H(P)$ ammette, su $\partial\Sigma_\varepsilon(O)$, anche un massimo assoluto positivo, che però non serve per le nostre considerazioni.

6. Giova notare come alla precedente dimostrazione del teorema del DIRICHLET si possa dare una forma sintetica, che, pur richiedendo, in una formulazione rigorosa, sviluppi logici equivalenti a quelli testè esposti, lo rende immediatamente intuitivo.

Nello spazio A_{2n} degli atti di moto consideriamo le ipersuperficie $H = \text{cost.}$ (*ipersuperficie isoenergetiche*), scrivendone l'equazione sotto la forma

$$H = c \tag{5}$$

dove c denota una costante arbitraria, certamente non negativa nelle vicinanze di P^*. Per $c = 0$ codesta ipersuperficie si riduce al punto P^*, che rappresenta lo stato di equilibrio nella configurazione C^*; mentre per $c > 0$ e abbastanza piccolo le ipersuperficie (5) risultano *chiuse* intorno ad P^*, e al crescere di c si susseguono in modo che ciascuna contiene al suo interno tutte le precedenti. Ciò consegue in via logica dalle sole ipotesi della continuità di H e del minimo effettivo in P^* e si può giustificare rigorosamente con argomentazioni equivalenti a quelle del n. prec.

Ora, in base a codeste osservazioni, il teorema del DIRICHLET appare senz'altro come intuitivo. Infatti, valendo l'integrale delle forze vive, il punto rappresentativo P, in un qualsiasi moto perturbato, non abbandona mai la ipersuperficie (5), su cui si è trovato inizialmente, cosicchè basta prefissare abbastanza piccola la perturbazione iniziale, cioè in sostanza la costante c corrispondente all'atto di moto iniziale P_0, perchè P si mantenga indefinitamente prossimo quanto si vuole ad P^*.

7. TEOREMA DEL LJAPUNOV (1). — Importa rilevare che, subordinatamente ad una condizione matematicamente pre-

(1) ALESSANDRO LJAPUNOV, n. a Jaroslav (Russia centrale) nel 1857, m. a Pietroburgo (Leningrado) nel 1918. Fu professore di matematica all'Università di Charkov e si trasferì poi a Pietroburgo come membro di quella Accademia delle Scienze. Oltre ai notevoli contributi di cui è parola nel testo, lasciò ricerche profonde sulla teoria del potenziale e sull'equilibrio delle masse fluide rotanti.

$U = -V$

cisa, il teorema del DIRICHLET si può invertire; si ha, cioè, che *se lo stato di equilibrio* P^* *corrisponde semplicemente ad un valore stazionario del potenziale* U *che non sia un massimo, e se*, come accade nei casi più comuni, *l'assenza del massimo si può riconoscere dall'esame dei valori numerici locali delle derivate seconde, l'equilibrio è instabile.*

È questo un teorema del LJAPUNOV che noi non dimostreremo; ma ci riserbiamo di indicare più avanti, sia pur ricorrendo a qualche veduta intuitiva, l'ordine di deduzioni con cui si può pervenire ad esso (§ 5). Qui intanto aggiungiamo che lo stesso LJAPUNOV ha altresì dimostrato che si ha instabilità anche in gran parte dei casi eccezionali, in cui per accertare l'assenza del massimo bisogna ricorrere alle derivate di ordine superiore al secondo.

Noi non ci indugeremo su questa discussione che richiede conoscenze non del tutto elementari di teoria delle equazioni differenziali; ma non tralascieremo di osservare che in queste considerazioni di stabilità, che come vedremo ai §§ 4, 5 si estendono dal caso dell'equilibrio a quello del moto, si è condotti a riconoscere che *la instabilità costituisce la regola, mentre la stabilità è soltanto l'eccezione* (1).

(1) Per giustificare questa asserzione per quel che riguarda gli stati di equilibrio, limitatamente al caso in cui l'esistenza o assenza del massimo di U si può assodare dall'esame dei valori locali delle derivate seconde, basta ricordare che il criterio discriminativo fra stabilità e instabilità è dato dall'essere o no definita negativa la forma quadratica in n variabili, che ha per coefficienti codesti valori locali delle derivate seconde. Ora si sa dall'Algebra che affinchè una tal forma quadratica sia definita negativa si richiede che certi n determinanti di ordine $n, n-1, \dots, 1$ abbiano tutti egual segno; ed è questa una eventualità del tutto particolare fra tutte quelle possibili pei segni di codesti determinanti. Per quanto riguarda gli stati di moto vedasi LEVI-CIVITA, *Sopra alcuni criteri di instabilità*, Annali di Matematica, T. V, 1901, pagg. 221-308.