CAPITOLO VII

Stabilità dell'equilibrio e del movimento. Piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile

§ 1. STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO.

166. - Le considerazioni esposte nel capitolo precedente permettono anzitutto una trattazione rigorosa delle condizioni di stabilità dell'equilibrio già introdotte in Statica (n. 100).

Ricordiamo che una posizione di equilibrio si dice stabile quando il sistema, rimosso da tale posizione, tende a ritornarvi o almeno a rimanere in un intorno di essa, muovendosi con velocità molto piccole. Per precisare questo concetto, consideriamo lo spazio delle fasi del sistema, cioè lo spazio dei punti P di coordinate q_1, q_2, $\ldots q_n$, p_1, p_2, $\ldots p_n$. Ora in questo spazio il punto rappresentativo di una posizione di equilibrio si può sempre supporre nell'origine O. Infatti se tale punto avesse coordinate lagrangiane q'_1, q'_2, $\ldots q'_n$ (ovviamente invariabili nel tempo), basterebbe assumere quali nuove coordinate lagrangiane le $q_1 - q'_1$, $q_2 - q'_2$, $\ldots q_n - q'_n$, che si annullano nella posizione di equilibrio. Le p_i poi sono nulle in quanto se il sistema è in quiete nella posizione di equilibrio, ivi sono nulle le $\dot{q}_i$ (e quindi le p_i).

Diremo *intorno rettangolare* R_ε del punto O l'insieme dei punti le cui coordinate differiscono in modulo dalle corrispondenti coordinate di O di quantità inferiori o uguali a ε, cioè si abbia

$$(1)\qquad \begin{array}{l} |q_1| \leqslant \varepsilon, \quad |q_2| \leqslant \varepsilon, \quad \ldots |q_n| \leqslant \varepsilon \\ |p_1| \leqslant \varepsilon, \quad |p_2| \leqslant \varepsilon, \quad \ldots |p_n| \leqslant \varepsilon \end{array} \quad [1].$$

---

[1] A rigore, poiché le q_i e le p_i non sono omogenee (le stesse q_i possono

Per esempio, nel caso di un sistema ad un sol grado di libertà, l'intorno R_ε si riduce ad un rettangolo di centro O e lati di lunghezza 2ε paralleli agli assi.

Ciò posto, diremo che un punto O dello spazio delle fasi rappresenta una posizione di equilibrio stabile quando, preso un numero ε positivo e arbitrario, è possibile trovare in corrispondenza a ε un intorno R_η $(\eta \leqslant \varepsilon)$ tale che, se le condizioni iniziali corrispondono ad un punto interno a R_η, ossia se i valori iniziali delle p_i e q_i soddisfano le (1), dove in luogo di ε si ponga η, il punto P rappresentativo del sistema, inizialmente in R_η, rimane, per ogni $t > 0$, nell'interno di R_ε, cioè per ogni t valgono le (1). In altre parole, come risulta dalla definizione intuitiva, l'equilibrio è stabile quando, in seguito ad eventuali spostamenti abbastanza piccoli dalla posizione di equilibrio e a velocità impresse pure abbastanza piccole, il sistema rimane sempre nelle vicinanze della configurazione di equilibrio e inoltre rimangono piccole le velocità dei punti del sistema (1)

167. - Dimostriamo ora il seguente teorema, in sostanza già enunciato nella Statica: *Se le forze agenti sul sistema si possono suddividere in due gruppi, le prime conservative con potenziale* U *ed energia potenziale* -V, *le altre dissipative (queste ultime possono anche mancare), e se nella posizione di equilibrio* U *è massima, quindi* V *è minima, l'equilibrio è stabile.*

Per dimostrare il teorema enunciato consideriamo la funzione $W = T + V$, che rappresenta l'energia; questa funzione dipenderà al solito dalle q_i e $\dot{q}_i$, però, risolvendo le (31) del capitolo precedente, si potranno esprimere le $\dot{q}_i$ in funzione delle p_i e quindi W risulterà funzione delle q_i e p_i. Ora se W è minima in O nello spazio delle fasi, consideriamo un generico punto P di un intorno di O in cui sia sensibile il minimo di V; essendo $T(O) = 0$ (2) (perché in O sono nulle le $\dot{q}_i$ e quindi le p_i) e $T(P) \geqslant 0$,

non essere omogenee fra loro: si pensi alle coordinate polari ρ, θ, di dimensioni ovviamente diverse), sarebbe più opportuno considerare ε diversi per ognuna delle disuguaglianze (1). Per semplificare l'esposizione abbiamo assunto invece un unico valore di ε.

(1) Si ricordi che, se le p_i sono piccole, tali rimangono anche le $\dot{q}_i$ e quindi le velocità dei punti del sistema.

(2) Il valore di una grandezza calcolata in P (o in O) è indicato, per esempio, con V(P) (o V(O)) significa il valore di questa grandezza calcolata per le p_i e q_i corrispondenti alle coordinate di P (o di O).

si ha

$$(2) \qquad W(P) = V(P) + T(P) > V(0) = W(0),$$

cioè $W(P)$ è minima nell'origine, anzi, poiché V è determinata a meno di una costante, si potrà sceglierla in modo che sia $V(0) = 0$ e sia quindi $W(0) = 0$. Ora ε sia appunto abbastanza piccolo in modo che nell'intorno R_ε sia ancora sensibile il minimo di $W(P)$; quindi, escluso O, $W(P)$ sarà positivo in tutto R_ε compresa la frontiera (sulla quale sono valide le (1) con almeno un segno di uguaglianza) e sia $m_\varepsilon > 0$ il minimo di $W(P)$ sulla frontiera stessa. Si assuma ora l'intorno R_η corrispondente a ε sufficientemente piccolo in modo che per P in questo intorno sia $W(P) < m_\varepsilon$; sarà ovviamente $\eta \leqslant \varepsilon$ [1]. Se la posizione iniziale P_0 di P è interna a R_η, si ha $W(P_0) < m_\varepsilon$; d'altra parte, nelle nostre ipotesi, si ha (n. 159) che $W(P)$ per $t > 0$ è costante o decresce, quindi è $W(P) \leqslant W(P_0) < m_\varepsilon$. Ora se P uscisse da R_ε, dovrebbe in un certo istante $\bar{t}$ raggiungere un punto $\bar{P}$ della frontiera di R_ε e si avrebbe $W(\bar{P}) < m_\varepsilon$ in contrasto con l'ipotesi che m_ε sia il minimo di $W(P)$ sulla frontiera. Il punto P rimane perciò in R_ε ed il teorema sulla stabilità è perciò provato [2].

168. - Aggiungiamo qualche osservazione. Notiamo anzitutto che ci preoccupiamo della *stabilità nel futuro*, cioè per t positivo, la sola di interesse pratico. Su tale nozione ritorneremo a proposito della stabilità del movimento. Se escludiamo la presenza di forze dissipative, cosicché W sia costante, allora si avrebbe la stabilità per ogni istante positivo e negativo, cioè se il punto rappresentativo P è per $t = 0$ in R_η, in ogni istante è interno a R_ε. Rileviamo anche che in presenza di forze dissipative sarebbe possibile in casi molto generali provare (ma ometteremo la dimostrazione) che il punto rappresentativo P, supposto inizialmente interno a R_η, non solo rimane in R_ε ma tende a O, cioè il sistema tende alla posizione di equilibrio; si ha cioè *stabilità asintotica*.

Notiamo infine che per la nostra dimostrazione non è necessario che $W(P)$ rappresenti l'energia; basta che esista una funzione $W(P)$, nulla in O e positiva in un intor-

---

[1] Infatti, se fosse $\eta \geqslant \varepsilon$, R_ε sarebbe interno a R_η ed esisterebbe almeno un punto di R_η in cui sarebbe $W(P) = m_\varepsilon$.

[2] E' ovvio che se nell'intorno R_ε non fosse sensibile il minimo, si considererebbe un intorno $R_{\varepsilon'}$, interno a R_ε, in cui tale minimo esiste e si sceglierebbe η in corrispondenza a ε'. Ovviamente, se P rimane in $R_{\varepsilon'}$, rimane anche in R_ε.

no di O, che decresca al crescere di t (ovviamente W è funzione di t, perché P e le sue coordinate p_i e q_i dipendono da t). Il teorema è ancora valido anche se W dipende esplicitamente dal tempo t, cioè se fosse $W = W(P, t)$, purché esista una funzione $W'(P)$, indipendente da t, positiva in un intorno di O e per ogni t nulla in O (dove è, ovviamente, minima), tale che $W(P, t) \geq W'(P)$. La dimostrazione procederebbe come nel caso precedente assumendo per m_ε il minimo di $W'(P)$ sulla frontiera di R_ε e prendendo R_η in modo che per P in R_η sia $W(P, 0) < m_\varepsilon$.

§ 2. TEORIA DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI DI UN SISTEMA ATTORNO AD UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE.

169. - Dopo aver precisato la nozione di stabilità dell'equilibrio, è assai importante lo studio dei moti che possono svolgersi in prossimità delle posizioni di equilibrio stabile; infatti moti di questo tipo, o riconducibili a questo tipo, si presentano molto spesso in pratica.

Ricordiamo che un punto materiale, mobile su una retta sotto l'azione di una forza elastica, si muove di moto oscillatorio armonico (n. 43); ricordiamo anche che un altro esempio di tale moto è offerto dalle piccole oscillazioni del pendolo intorno alla sua posizione di equilibrio stabile (n. 55). Orbene possiamo dimostrare che quest'ultima proprietà è generale, cioè sono armonici i *piccoli moti* (questa nozione verrà precisata fra poco) di un sistema meccanico a un grado di libertà, con vincoli indipendenti dal tempo, intorno a una posizione di equilibrio stabile in cui la derivata seconda dell'energia potenziale V sia diversa da zero (e perciò positiva [1]).

Sia infatti q la coordinata lagrangiana che descrive il moto; nulla vieta di supporre che la posizione di equilibrio del sistema si abbia per $q = 0$ (se tale posizione corrispondesse al valore non nullo q_0 di q, basterebbe assumere come coordinata lagrangiana $q - q_0$ per ridursi al caso ora considerato). Inoltre, poiché l'energia potenziale V è determinata a meno di una costante, non è restrittivo assumere $V(0) = 0$. Ora, come si è visto, rimuovendo di poco il sistema da una posizione di equilibrio stabile, cioè perturbando di poco questo equilibrio, q e $\dot{q}$ restano molto piccole; potremo supporre i valori relativi alle condizioni iniziali abbastanza piccoli in modo che q e $\dot{q}$

[1] Si ricordi che in una posizione di equilibrio stabile il potenziale U è massimo e perciò l'energia potenziale $V = -U$ è minima.

siano tali da poter trascurare nella espressione di T e di V i termini di grado superiore al secondo in q e $\dot{q}$; in questo caso diremo appunto che il sistema compie un *piccolo moto* intorno alla posizione di equilibrio stabile. Con questa approssimazione, sviluppando V in serie di Mac Laurin e tenendo presente che per $q = 0$ è $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$, perché l'origine è posizione di equilibrio stabile, si ha

$$V(q) = aq^2, \tag{1}$$

dove a è una costante positiva [1]. Inoltre, poiché in questo caso si ha

$$T = T_{11}(q)\dot{q}^2, \tag{2}$$

sviluppando T_{11} in serie di Mac Laurin di q [2] e trascurando per le nostre ipotesi i termini in $q \cdot \dot{q}^2$ e di grado superiore, si ha

$$T = c\dot{q}^2, \tag{3}$$

dove si è posto $c = T_{11}(0)$; ovviamente è $c > 0$, perché tale è $T_{11}(q)$ (altrimenti T si annullerebbe o diverrebbe negativa per $\dot{q} \neq 0$). Si ha così, per le equazioni di Lagrange [3],

$$c\ddot{q} = -aq \tag{4}$$

ossia, posto $\omega^2 = \frac{a}{c}$ (si ricordi che, essendo $a > 0$ e $c > 0$, è anche $\frac{a}{c} > 0$),

$$\ddot{q} = -\omega^2 q; \tag{5}$$

e per quanto si è visto al n. 43, l'integrale generale di questa equazione è

$$q = C\cos(\omega t + \gamma), \tag{6}$$

dove C e γ sono costanti che si determinano con le condizioni iniziali. Come si è affermato, il moto del sistema è armonico, di pulsazione ω.

---

(1) $2a$ è infatti il valore di $\frac{d^2V}{dq^2}$ per $q = 0$, ed è perciò positiva.

(2) Cioè $T_{11}(q) = T_{11}(0) + T'_{11}(0)\,q + \ldots$.

(3) A rigore, sarebbe più esatto scrivere le equazioni di Lagrange e poi trascurare i termini di ordine superiore al primo; il risultato sarebbe però identico, quindi, come faremo anche in seguito, eseguiremo, com'è più comodo, le approssimazioni sulla espressione della energia cinetica e potenziale.

170. - Dopo questo semplice richiamo, passiamo allo studio dei piccoli moti per i sistemi dotati di due gradi di libertà, in quanto, come vedremo, l'estensione a più gradi di libertà non offre grandi difficoltà concettuali.

Consideriamo dunque un sistema a due gradi di libertà, a vincoli fissi, soggetto a sollecitazione conservativa di cui sia V l'energia potenziale; siano q_1 e q_2 i parametri lagrangiani che determinano il sistema. In una certa configurazione C_0 la funzione V abbia un minimo che supporremo riconoscibile dall'esame dei valori locali delle derivate seconde. Come si è ricordato al numero precedente e come si è visto al n. 167, C_0 è allora configurazione di equilibrio stabile, cioè perturbando di poco tale equilibrio il sistema si muove indefinitamente e con piccole velocità nell'intorno di C_0. Come nel numero precedente, possiamo scegliere le coordinate lagrangiane q_1 e q_2 in modo che si annullino in C_0 assieme alla V (sempre determinata a meno di una costante additiva); è quindi $V(0, 0) = 0$; inoltre supporremo lecito trascurare nella espressione di V e T i termini di grado superiore al secondo nelle q e $\dot{q}$. Allora applicando a $V(q_1, q_2)$ la formula di Mac Laurin, possiamo trascurare i detti termini e, tenendo presente che per l'equilibrio $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ sono nulle in C_0, cioè per $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, si ottiene

$$(7) \qquad V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right],$$

dove l'indice zero sta a indicare valori assunti per $q_1 = q_2 = 0$. Per l'esistenza del minimo riconoscibile mediante le derivate seconde, il trinomio a secondo membro di (7) deve essere una forma quadratica definita positiva nelle q_1, q_2, cioè se, con ovvio significato dei simboli, si scrive

$$(8) \qquad V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(a_{11} q_1^2 + 2 a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2),$$

il trinomio è definito positivo e devono valere le relazioni [1]

$$(9) \qquad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, \qquad a_{11} > 0.$$

[1] Queste relazioni esprimono note proprietà delle forme quadratiche definite positive (cfr. G. CIMMINO, Analisi algebrica, II ed., § 88, Pàtron, Bologna). Si noti del resto che la prima di queste relazioni esprime la positività dell'Hessiano, l'altra la positività della derivata seconda pura rispetto ad una variabile, condizioni sufficienti per riconoscere il minimo di V dalle derivate seconde.

D'altra parte anche nell'espressione dell'energia cinetica, costituita solo della forma quadratica in $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_2$

$$(10) \qquad T = \frac{1}{2}\left(T_{11}\dot{q}_1^2 + 2\,T_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + T_{22}\dot{q}_2^2\right),$$

si può applicare lo sviluppo di Mac Laurin ai coefficienti $T_{ik}(q_1, q_2)$ conservando solo i termini del secondo ordine, corrispondenti ai valori assunti da tali coefficienti per $q_1 = q_2 = 0$. Posto

$$(11) \qquad T_{11}(0, 0) = c_{11}, \qquad T_{12}(0, 0) = c_{12}, \qquad T_{22}(0, 0) = c_{22},$$

si ha per T la forma quadratica definita positiva

$$(12) \qquad T = \frac{1}{2}\left(c_{11}\dot{q}_1^2 + 2\,c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{22}\dot{q}_2^2\right),$$

perciò deve essere

$$(13) \qquad c_{11}c_{12} - c_{12}^2 > 0, \qquad c_{11} > 0.$$

Con i coefficienti a e c che compaiono in (8) e (12) possiamo formare le equazioni di due coniche a centro:

$$(14) \qquad \begin{aligned} a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 &= 1 \\ c_{11}x^2 + 2\,c_{12}xy + c_{22}y^2 &= 1, \end{aligned}$$

che, in forza delle (9) e (13), sono ellissi il cui centro comune è l'origine delle coordinate. È noto che è possibile introdurre una proiettività non degenere che trasformi, per esempio, la seconda ellisse in una circonferenza di raggio 1 e di equazione $X^2 + Y^2 = 1$ nelle nuove coordinate; con un'ulteriore rotazione intorno all'origine (che naturalmente lascia invariata l'ultima equazione) si possono far coincidere gli assi X e Y con quelli della prima ellisse facendo così scomparire nell'equazione corrispondente il termine rettangolare. Indicando con z_1 e z_2 (¹) le nuove coordinate lagrangiane che conseguono da tali operazioni e che sono dette *normali* (relativamente allo stato di equilibrio considerato), V e T risultano allora espressi nella forma

$$(15) \qquad \begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 z_1^2 + \omega_2^2 z_2^2\right) \\ T &= \frac{1}{2}\left(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2\right), \end{aligned}$$

(¹) Poiché le operazioni indicate sono espresse da relazioni lineari, sono lineari le relazioni fra z_1, z_2 e q_1, q_2.

con $\omega_1^2 > 0$, $\omega_2^2 > 0$; applicando allora le equazioni di Lagrange, si ottiene che il moto del sistema sarà regolato dalle equazioni

$$(16) \qquad \ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = 0, \qquad \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = 0,$$

e perciò entrambe le coordinate normali variano con legge armonica e con frequenze nell'ordine $\frac{\omega_1}{2\pi}$, $\frac{\omega_2}{2\pi}$. Più precisamente si ha

$$(17) \qquad z_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1), \qquad z_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \gamma_2),$$

dove C_1, C_2, γ_1, γ_2 si determinano con le condizioni iniziali. Ora q_1 e q_2 sono combinazioni lineari di z_1 e z_2, cosicché si può scrivere

$$(18) \qquad \begin{aligned} q_1 &= A_1' \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + A_1'' \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \\ q_2 &= A_2' \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2'' \cos(\omega_2 t + \gamma_2), \end{aligned}$$

ove A_1', A_2' sono costanti proporzionali a C_1 e A_1'' e A_2'' sono costanti proporzionali a C_2. Si conclude che *le piccole oscillazioni del sistema attorno ad una configurazione di equilibrio stabile risultano dalla composizione di due moti armonici del tipo suddetto* (aventi frequenze in generale diverse), chiamati anche *vibrazioni principali*, ognuna delle quali si può ottenere separatamente ponendo uguale a zero una delle coordinate z_1 o z_2.

171. - La ricerca delle frequenze ω_1 e ω_2, dette *frequenze fondamentali*, si può effettuare direttamente mediante le (8) e (12) scrivendo le equazioni di Lagrange nelle coordinate q_1, q_2. Si ha infatti

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = a_{11}q_1 + a_{12}q_2.$$

Quindi l'equazione di Lagrange relativa al parametro q_1 è

$$(19) \qquad c_{11}\ddot{q}_1 + c_{12}\ddot{q}_2 = -a_{11}q_1 - a_{12}q_2$$

e, in modo analogo, scambiando gli indici, si ha

$$(20) \qquad c_{21}\ddot{q}_1 + c_{22}\ddot{q}_2 = -a_{21}q_1 - a_{22}q_2,$$

avendo posto $c_{21} = c_{12}$ e $a_{21} = a_{12}$.

Ora si è visto che q_1 e q_2 sono combinazioni lineari di z_1 e z_2. Scelte però le condizioni iniziali in modo che z_1 (o z_2) sia uguale allo zero, si potrà scrivere

$$q_1 = A' \cos(\omega t + \gamma), \qquad q_2 = A'' \cos(\omega t + \gamma),$$

dove ω può coincidere con ω_1 o ω_2, a seconda che è nulla z_1 o z_2, e A' e A'' sono, come γ, costanti [1]. Sostituendo nelle (19) e (20) e dividendo per $\cos(\omega t + \gamma)$, si ha

$$(21) \qquad \begin{cases} (c_{11}\omega^2 - a_{11})\,A' + (c_{12}\omega^2 - a_{12})\,A'' = 0 \\ (c_{21}\omega^2 - a_{21})\,A' + (c_{22}\omega^2 - a_{22})\,A'' = 0, \end{cases}$$

cioè un sistema omogeneo in A' e A''. Poiché A' e A'' non possono essere ambedue nulli, altrimenti non si avrebbe moto, deve essere nullo il determinante dei coefficienti. Si ha così

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} c_{11}\omega^2 - a_{11} & c_{12}\omega^2 - a_{12} \\ c_{21}\omega^2 - a_{21} & c_{22}\omega^2 - a_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Inoltre deve essere

$$(23) \qquad \frac{A'}{A''} = - \frac{c_{12}\omega^2 - a_{12}}{c_{11}\omega^2 - a_{11}} .$$

La (22) è un'equazione di secondo grado in ω^2, le cui radici coincidono con ω_1^2 e ω_2^2; con ciò si determinano le frequenze principali.

172. - Applichiamo i risultati ottenuti nel numero precedente a qualche caso concreto.

Consideriamo, per esempio, il modello di una molecola triatomica lineare, formata da un atomo, che diremo P_0, di massa M e da due atomi, P_1 e P_2, di massa m; i tre atomi sono sempre allineati, esercitano fra loro mutue azioni e in condizioni di equilibrio P_1 e P_2 sono simmetricamente disposti rispetto a P_0 ed è $P_1P_0 = P_2P_0 = b$. Vogliamo studiare, con ipotesi che ora specificheremo, il moto degli atomi quando sono spostati di poco dalla loro posizione di equilibrio.

A questo scopo osserviamo che, se trascuriamo le rotazioni della molecola, si può sempre porre l'origine del sistema di riferimento nel baricentro G del sistema: con ciò non si devono aggiungere, per la relatività galileiana (n. 65), altre forze, perché G si muove (agendo sul sistema solo forze interne) di moto rettilineo e uniforme e perché si trascurano le rotazioni. Allora, dette x_0, x_1, x_2 le ascisse di P_0, P_1, P_2, si ha

$$(24) \qquad m x_1 + m x_2 + M x_0 = 0.$$

---

[1] A', A'', γ coincidono o con A_1', A_2', γ_1 o con A_1'', A_2'', γ_2.

i due gradi di libertà del sistema, che, nel nostro caso, si manifesta col fatto che l'oscillazione di P_1 è di grande ampiezza quando è piccola quella di P_2 e viceversa.

173. - Un altro esempio relativo alle questioni sopra indicate si ha nel cosiddetto bipendolo semplice, formato da due corpi puntiformi P_1 e P_2, P_1 unito al punto fisso O con un filo (meglio con un'asta rigida di massa trascurabile) di lunghezza l_1, P_2 unito a P_1 con un filo di lunghezza l_2. Il sistema (Fig. 178) sia mobile in un piano verticale. Siano m_1 e m_2 le masse di P_1 e P_2, θ_1 e θ_2 gli angoli che OP_1 e P_1P_2 formano con la verticale discendente. Poiché studieremo solo piccole oscillazioni del sistema intorno alla sua posizione di equilibrio stabile, supporremo piccoli θ_1 e θ_2, per cui si possono trascurare i termini di grado complessivo superiore al secondo in θ_1, θ_2 e derivate. L'energia potenziale riferita al piano orizzontale passante per O (le quote di P_1 e P_2 sono rispettivamente $+l_1 \cos\theta$, $+l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$) è ([illegible])

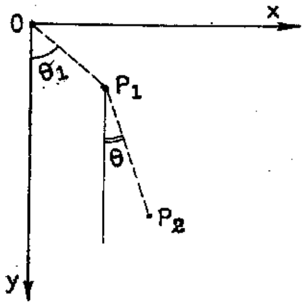

Fig. 178

$$(39) \qquad V = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 .$$

Sviluppando i coseni in serie e trascurando le potenze di θ_1 e θ_2 superiori alle seconde, si ha (a meno di una costante)

$$(40) \qquad V = g(m_1 l_1 + m_2 l_2)\frac{\theta_1^2}{2} + g m_2 l_2 \frac{\theta_2^2}{2} .$$

Le coordinate di P_1 e P_2, rispetto ad un sistema di assi x e y con origine in O e l'asse y verticale e orientato verso il basso, sono

$$x_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad y_1 = l_1 \cos\theta_1$$
$$x_2 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad y_2 = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 .$$

Quindi è

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 \qquad \dot{y}_1 = -l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1$$
$$\dot{x}_2 = l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \qquad \dot{y}_2 = -l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \dot{\theta}_2 .$$

Si ha così

$$(41) \qquad T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2 + \dot{y}_2^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

e purché θ_1 e θ_2 siano piccoli, con le approssimazioni di cui si è detto [1] si può sostituire a $\cos(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2$ il valore $\dot\theta_1\dot\theta_2$. Si ha così

$$(42)\qquad T = \frac{1}{2}\left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot\theta_1^2 + m_2 l_2^2\dot\theta_2^2 + 2m_1 m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\right].$$

Per semplificare il calcolo delle frequenze fondamentali del sistema, ammetteremo che le masse e le lunghezze dei due pendoli siano uguali, cioè $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$. Allora l'equazione (22) che determina le frequenze è

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} 2ml^2\omega^2 - 2mgl & ml^2\omega^2 \\ ml^2\omega^2 & ml^2\omega^2 - mgl \end{vmatrix} = 0$$

da cui, semplificando per m^2l^2 (dato che ogni termine del determinante contiene il fattore ml), si ha l'equazione

$$2l^2\omega^4 - 4gl\omega^2 + 2g^2 - l^2\omega^4 = 0$$

ossia

$$(44)\qquad l^2\omega^4 - 4gl\omega^2 + 2g^2 = 0.$$

Da qui si ha

$$(45)\qquad \omega^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}).$$

Quindi i due periodi corrispondenti alle due pulsazioni sono

$$(46)\qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Perciò i valori di θ_1 e θ_2 sono espressi da una combinazione lineare di termini sinoidali, rispettivamente di periodo T_1 e T_2. Si noti che nessuno dei due periodi coincide col periodo $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ del pendolo di lunghezza l, anzi, essendo $\sqrt{2+\sqrt{2}} > 1$, $\sqrt{2-\sqrt{2}} < 1$, si ha che T_0 è intermedio fra i periodi T_1 e T_2.

174. - Accenniamo ora al caso in cui sul sistema meccanico, che supporremo ancora, per fissare le idee, a due gradi di libertà, agiscono forze di resistenza proporzionali alla velocità, cioè sul punto P_s del sistema agisca la forza

---

[1] Cioè trascurando $\dot\theta_1\dot\theta_2$ moltiplicato per termini dell'ordine di $(\theta_1-\theta_2)^2$ e potenze superiori.

(47) $$\vec{F}_s = -\lambda_s \vec{v}_s = -\lambda_s \frac{dP_s}{dt},$$

dove λ_s indica un coefficiente positivo indipendente dalla velocità. Per la forza lagrangiana relativa all'indice i, dovuta alle forze dissipative e che, per brevità, indicheremo con Q_i, si ha allora

(48) $$Q_i = \sum_1^N{}_s \vec{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} = -\sum_1^N{}_s \lambda_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}.$$

Introducendo la formula (43) del Cap. VI

(49) $$\frac{\partial P_s}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i},$$

si ottiene

(50) $$Q_i = -\sum_1^N{}_s \lambda_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_1^N{}_s \frac{\lambda_s v_s^2}{2}.$$

Ora si ponga

(51) $$\mathfrak{F} = \sum_1^N{}_s \frac{\lambda_s v_s^2}{2};$$

questa funzione, introdotta da Lord Rayleigh ([1]), viene chiamata *funzione di dissipazione*. Essa ha la stessa espressione dell'energia cinetica, salvo che i coefficienti λ_s sostituiscono le masse m_s, ossia $\mathfrak{F}$ è una funzione quadratica omogenea nelle $\dot{q}$ e nel caso di sistemi a due gradi di libertà ha la forma

(52) $$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2^2),$$

dove b_{11}, $b_{12} = b_{21}$, b_{22} sono funzioni di q_1 e q_2. Nel caso però delle piccole oscillazioni intorno ad una configurazione di equilibrio stabile, lo stesso ragionamento fatto a proposito dell'energia cinetica porta a concludere che i b possono ritenersi costanti. Si ha subito allora da (50)

(53) $$Q_i = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Quindi, se oltre alle forze dotate di energia potenziale V, agiscono forze dissipative del tipo indicato, le equazioni di Lagrange si possono scrivere:

([1]) Lord RAYLEIGH (J. W. Strutt) nato a Langford Grove (Essex) nel 1842, morto a Witham (Essex) nel 1919.

$$(54)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2),$$

ossia

$$(55)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 .$$

Si noti che il lavoro elementare delle forze dissipative vale (ci riferiamo ai sistemi a due gradi di libertà, ma il risultato è generale)

$$(56)\qquad d\mathfrak{L}_r = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = (Q_1\dot q_1 + Q_2\dot q_2)\,dt = = -\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot q_1}\dot q_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot q_2}\dot q_2\right)dt .$$

Ora, poiché la $\mathfrak{F}$ è funzione quadratica omogenea di $\dot q_1$ e $\dot q_2$, ricordando il teorema di Eulero si ha

$$(57)\qquad d\mathfrak{L}_r = -2\mathfrak{F}dt .$$

Quindi il teorema dell'energia (Cap. VI, formula (94)) diventa in questo caso

$$(58)\qquad d(T+V) = d\mathfrak{L}_r = -2\mathfrak{F}dt .$$

175. - Ciò posto, notiamo che per la (52) si ha

$$(59)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot q_1} = b_{11}\dot q_1 + b_{12}\dot q_2 ;$$

la prima equazione di Lagrange delle piccole oscillazioni in presenza di forze dissipative per sistemi a due gradi di libertà è

$$c_{11}\ddot q_1 + c_{12}\ddot q_2 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + b_{11}\dot q_1 + b_{12}\dot q_2 = 0$$

e analoga equazione si ha per la seconda coordinata. Conviene assumere però come coordinate lagrangiane le coordinate normali z_1 e z_2 introdotte nei numeri precedenti. Si ha allora [1]

$$(60)\qquad \begin{aligned} \ddot z_1 + b_{11}\dot z_1 + b_{12}\dot z_2 &= -\omega_1^2 z_1 \\ \ddot z_2 + b_{21}\dot z_1 + b_{22}\dot z_2 &= -\omega_2^2 z_2 . \end{aligned}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare delle (61) ponendo

---

[1] Si tenga presente che per passare dalle q alle z, si è compiuta una trasformazione lineare, perciò le b che compaiono in queste equazioni non coincidono, in generale, con quelle di (52), ma sono una loro combinazione lineare.

$$z_1 = C_1 e^{\alpha t}, \qquad z_2 = C_2 e^{\alpha t} \tag{61}$$

con α, C_1 e C_2 costanti; si ha subito

$$\begin{aligned} &(\alpha^2 + b_{11}\alpha + \omega_1^2) C_1 + b_{12}\alpha C_2 = 0 \\ &b_{21}\alpha C_1 + (\alpha^2 + b_{22}\alpha + \omega_2^2) C_2 = 0 . \end{aligned} \tag{62}$$

Si ha così un sistema di primo grado in C_1 e C_2, che ammette soluzioni non nulle soltanto se è

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + b_{11}\alpha + \omega_1^2 & b_{12}\alpha \\ b_{21}\alpha & \alpha^2 + b_{22}\alpha + \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{63}$$

La (63) è un'equazione di quarto grado completa, a coefficienti reali, dotata di quattro radici che, nei casi più comuni, sono complesse cioè della forma $-\beta_1 + i\Omega_1$, $-\beta_1 - i\Omega_1$, $-\beta_2 + i\Omega_2$, $-\beta_2 - i\Omega_2$. Quindi z_1 e z_2, e di conseguenza q_1 e q_2 combinazione lineare di z_1 e z_2, saranno una combinazione lineare di quattro esponenziali con esponenti le espressioni soprascritte moltiplicate per t. Da una delle due equazioni (62) si può poi ricavare, in corrispondenza a ciascun valore di α, il rapporto fra C_1 e C_2.

Con note considerazioni di analisi, i due primi esponenziali possono essere sostituiti con le espressioni reali $e^{-\beta_1 t}\cos\Omega_1 t$, $e^{-\beta_1 t}\operatorname{sen}\Omega_1 t$, i due ultimi con $e^{-\beta_2 t}\cos\Omega_2 t$, $e^{-\beta_2 t}\operatorname{sen}\Omega_2 t$. Cioè si avrà

$$q_1 = C_1' e^{-\beta_1 t}\cos(\Omega_1 t + \gamma_1') + C_1'' e^{-\beta_2 t}\cos(\Omega_2 t + \gamma_1'') \tag{64}$$

dove C_1', C_1'', γ_1', γ_1'' sono costanti, dipendenti anche dalle condizioni iniziali. Analoga formula vale per q_2 (1). Ora β_1 e β_2 sono positivi, altrimenti q_1 e q_2 oscillerebbero con ampiezza crescente esponenzialmente col tempo, cioè la presenza di forze dissipative renderebbe instabile l'equilibrio, al contrario del teorema formulato al n. 167. Si conclude che q_1 e q_2 sono in generale espresse dalla sovrapposizione di due moti smorzati, aventi diversi il periodo e il coefficiente di smorzamento.

Notiamo che se i quadrati delle b sono trascurabili, la (63) diventa

---

(1) Si noti però che delle otto costanti che complessivamente compaiono nell'espressione di q_1 e q_2 solo quattro risultano indipendenti, perché, come si è detto, per ogni valore di α è assegnato il rapporto C_1/C_2, ossia il rapporto fra le ampiezze e le fasi iniziali dei due moti smorzati che esprimono q_1 e q_2.

$$(65) \qquad (\alpha^2 + b_{11}\alpha + \omega_1^2)(\alpha^2 + b_{22}\alpha + \omega_2^2) = 0,$$

cioè l'equazione di quarto grado si spezza in due equazioni di secondo grado. Risolvendo la prima di queste equazioni si trova, trascurando poi b_{11}^2,

$$(66) \qquad \alpha_1 = -\frac{b_{11}}{2} \pm \sqrt{\frac{b_{11}^2}{4} - \omega_1^2} \simeq -\frac{b_{11}}{2} \pm i\omega_1 .$$

Quindi

$$(67) \qquad \beta_1 = \frac{b_{11}}{2}, \qquad \Omega_1 = \omega_1$$

e, in modo analogo,

$$(68) \qquad \beta_2 = \frac{b_{22}}{2}, \qquad \Omega_2 = \omega_2 .$$

In altre parole, in questo caso, l'azione delle forze dissipative produce uno smorzamento, ma non altera sensibilmente il periodo delle oscillazioni.

Quando tutte le α sono reali, q_1 e q_2 risultano una somma di quattro funzioni esponenziali decrescenti; se solo due delle α sono reali, q_1 e q_2 si ottengono sovrapponendo un moto oscillatorio smorzato con due esponenziali decrescenti.

176. - Non sarà inutile osservare che finora abbiamo considerato le cosiddette oscillazioni *libere* di un sistema nelle vicinanze di una posizione di equilibrio, per distinguerle dalle oscillazioni *forzate* che si presentano quando, oltre alle forze conservative ed eventualmente quelle dissipative, agiscono anche forze dipendenti dal tempo, più precisamente con legge sinoidale di pulsazione Ω. Le equazioni del moto, riferite alle coordinate normali z_1 e z_2, hanno la forma

$$(69) \qquad \begin{cases} \ddot{z}_1 + b_{11}\dot{z}_1 + b_{12}\dot{z}_2 + \lambda_1 z_1 = N_1 \cos(\Omega t + \gamma_1) \\ \ddot{z}_2 + b_{21}\dot{z}_1 + b_{22}\dot{z}_2 + \lambda_2 z_2 = N_2 \cos(\Omega t + \gamma_2), \end{cases}$$

dove N_1, N_2, γ_1, γ_2 sono costanti. Come nel caso dei sistemi a un grado di libertà (n. 50), si cerca un integrale particolare delle (69) che sia espresso da una funzione sinoidale del tempo, di pulsazione Ω [1], ed a questo

[1] Per determinare questo integrale particolare è assai comodo, come nei sistemi ad un grado di libertà, la rappresentazione delle funzioni sinoidali mediante numeri complessi.