moltiplicando per dt le equazioni (2.17) che esprimono i vincoli di anolonomia, cioè

$$\sum_{h=1}^{n} A_{jh}(q,t)dq_h + B_j(q,t)dt = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., r'). \tag{2.18}$$ eq.2.18

Ne consegue che nei sistemi anolonomi **il numero di gradi di libertà, ossia il numero di incrementi infinitesimi indipendenti che le coordinate lagrangiane possono subire compatibilmente con i vincoli**, è sempre minore del numero di coordinate lagrangiane che definiscono la configurazione del sistema.
Possiamo perciò porre la seguente:
Def. 11: *Si dice* **numero di gradi di libertà** *di un sistema anolonomo, la differenza fra il numero n di coordinate lagrangiane ed il numero r' dei vincoli di anolonomia, cioè $\ell = n - r'$.*
Se poi il sistema anolonomo è discreto e formato da N punti materiali, sottoposti anche ad r vincoli olonomi, si avrà $\ell = n - r' = 3N - r - r'$.
Esempio: Nel caso, già citato come sistema anolonomo, di una sfera vincolata a rotolare senza strisciare su di un piano si dimostra che occorrono 5 coordinate lagrangiane per individuare una sua generica configurazione, ma siccome gli incrementi infinitesimi di tali coordinate sono legati da 2 vincoli di mobilità non integrabili, il sistema ha 5-2=3 gradi di libertà.[2]
Osservazione: Osserviamo che se i vincoli di anolonomia sono tutti indipendenti dal tempo, nella (2.18) mancheranno i termini $B_j(q,t)dt$ ed inoltre i coefficienti A_{jh} saranno indipendenti dal tempo e perciò risulteranno funzioni delle sole coordinate lagrangiane q_h.
I vincoli di anolonomia (2.18) si presenteranno allora sotto *forma omogenea*, cioè:

$$\sum_{h=1}^{n} A_{jh}(q)dq_h = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., r'). \tag{2.19}$$ eq.2.19

2.5 Spostamenti elementari: possibili, effettivi, virtuali

sec.2.5

Nell'ambito della Meccanica Lagrangiana assumono grande importanza i cosiddetti **spostamenti virtuali** di un dato sistema materiale che definiremo fra un momento. Prima però, per completezza di trattazione definiamo altri due tipi di **spostamenti elementari**.
Def. 1: *Dicesi* **spostamento possibile** *($dP \equiv dr$) di un punto P di un dato sistema materiale $\mathcal{S}$, ogni ipotetico* **spostamento infinitesimo** *che potrebbe subire P, nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$, rispettando i vincoli.*
Lo spostamento possibile $d\mathcal{S}$ dell'intero sistema è l'insieme degli spostamenti possibili di tutti i suoi punti. Esso fa passare il sistema dalla configurazione $\mathcal{C}_t$, relativa all'istante t, ad un'altra infinitamente vicina $\mathcal{C}_{t+dt}$, compatibile con i vincoli, e relativa all'istante $t + dt$.
Se il sistema è particellare, olonomo o anolonomo, la sua generica configurazione all'istante

[2]Per questo esempio si può consultare: T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol.1, pag.305-309, Zanichelli, Bologna, 1974; oppure: Silvio Nocilla, *Lezioni di Meccanica Razionale, (per allievi ingegneri)* pag.127-129, Libreria Editrice Universitaria Levrotto e Bella, Torino (1982).

t, è individuata dalle equazioni

$$r_i = r_i(q_1, q_2, ..., q_n; t) \qquad (i = 1, 2, ..., N), \qquad (2.20)$$ eq.2.20

perciò l'espressione matematica degli spostamenti possibili è data da

$$dP_i \equiv dr_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial r_i}{\partial t} dt \qquad (i = 1, 2, ..., N). \qquad (2.21)$$ eq.2.21

Nella (2.21) gli incrementi $(dq_1, dq_2, ..., dq_n)$ delle coordinate lagrangiane sono indipendenti se il sistema è olonomo, se esso è anolonomo tali incrementi non sono indipendenti ma legati dalle equazioni vincolari (2.18), se i vincoli sono reonomi, dalle (2.19) se in vincoli sono scleronomi.

Def. 2: *Dicesi* **spostamento effettivo (o reale)** $(dP \equiv dr)$ *di un punto P di un dato sistema materiale $\mathcal{S}$,* **lo spostamento infinitesimo** *che P subisce nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$, compatibile coi vincoli, in corrispondenza ad un determinato moto $\mathcal{M}$.*

Lo **spostamento effettivo** dell'intero sistema è l'insieme degli spostamenti effettivi di tutti i suoi punti. Tale spostamento oltre che rispettare i vincoli deve essere ovviamente compatibile anche con la sollecitazione a cui è sottoposto il sistema e che determina, a partire da assegnate condizioni iniziali, il moto $\mathcal{M}$.

L'espressione matematica di uno spostamento effettivo è formalmente la stessa di uno spostamento possibile, cioè la (2.21), dove però gli incrementi infinitesimi $(dq_1, dq_2, ..., dq_n)$, non sono ipotetici come nella definizione precedente, ma sono effettive variazioni che le coordinate lagrangiane subiscono durante il moto $\mathcal{M}$, nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$.

Def. 3: *Dicesi* **spostamento virtuale** $(\delta P \equiv \delta r)$, *relativo ad un determinato istante $\bar{t}$, di un punto P del dato sistema materiale $\mathcal{S}$,* **ogni ipotetico spostamento infinitesimo** *compatibile in generale, non con i vincoli, ma con* **la configurazione da essi assunta in tale istante** *(e considerata indipendente dal tempo).*

Lo spostamento virtuale dell'intero sistema $(\delta\mathcal{S})$ è l'insieme degli spostamenti virtuali di tutti i suoi punti relativamente all'istante $\bar{t}$: $\delta\mathcal{S} = \{\delta P, \forall P \in \mathcal{S} \text{ e } \bar{t} = cost.\}$, se il sistema è particellare si ha $\delta\mathcal{S} = \{\delta P_i, i = 1, 2, ..., N, \text{ e } \bar{t} = cost.\}$

Esso fa passare il sistema da una configurazione $\mathcal{C}_{\bar{t}}$, relativa all'istante $\bar{t}$, ad una configurazione $\mathcal{C}'_{\bar{t}}$, infinitamente vicina a $\mathcal{C}_{\bar{t}}$, relativa allo stesso istante $\bar{t}$ e compatibile con la configurazione che i vincoli hanno assunto in tale instante, **come se essi si fossero "congelati"**, cioè come se all'improvviso i vincoli fossero diventati indipendenti dal tempo (scleronomi).

Per i sistemi particellari, olonomi od anolonomi, la loro generica configurazione all'istante t, è individuata dalle equazioni

$$r_i = r_i(q_1, q_2, ..., q_n; t) \qquad (i = 1, 2, ..., N), \qquad (2.22)$$ eq.2.22

perciò **l'espressione matematica degli spostamenti virtuali** è data da

$$\delta P_i \equiv \delta r_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i = 1, 2, ..., N). \qquad (2.23)$$ eq.2.23

Nella (2.23) le $(\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n)$ sono gli **incrementi virtuali (infinitesimi)** delle coordinate lagrangiane. Essi sono indipendenti se il sistema è olonomo, se esso è anolonomo tali incrementi sono legati dalle relazioni lineari omogenee relative all'istante fissato $\bar{t}$:

$$\sum_{h=1}^{n} A_{jh}(q,\bar{t})dq_h = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., r'). \tag{2.24}$$

eq.2.24

Osservazione:
Val la pena di osservare che **ogni spostamento effettivo è ovviamente anche uno spostamento possibile**, cioè l'insieme degli spostamenti effettivi è un sottoinsieme di quello degli spostamenti possibili.
Non esiste invece, in generale, cioè per sistemi a **vincoli dipendenti dal tempo** (reonomi), alcuna relazione valida per ogni t, fra l'insieme degli spostamenti virtuali e l'insieme degli spostamenti possibili. È ovvio invece, che **se i vincoli sono indipendenti dal tempo** (scleronomi), **l'insieme degli spostamenti virtuali coincide con l'insieme degli spostamenti possibili.**
Def. 4: *Uno spostamento virtuale di $\mathcal{S}$, $\delta\mathcal{S} = \{\delta P_1, \delta P_2, ..., \delta P_N\}$ si dice* **invertibile (o reversibile)**, *se anche lo spostamento opposto $-\delta\mathcal{S} = \{-\delta P_1, -\delta P_2, ..., -\delta P_N\}$, a partire dalla stessa configurazione, è pur esso uno spostamento virtuale. Lo spostamento $\delta\mathcal{S}$ si dice* **non invertibile (o irreversibile)** *nel caso opposto.*
È evidente che se le tutte relazioni analitiche che definiscono i vincoli, siano essi olonomi o anolonomi, sono espresse da uguaglianze, **se cioè tutti i vincoli sono bilaterali, ogni spostamento virtuale è reversibile**, Se invece alcuni dei vincoli sono espressi da disuguaglianze (vincoli unilaterali), sono irreversibili quegli spostamenti virtuali che portano da una posizione di confine ad una posizione ordinaria.
Sempre a partire da una posizione di confine sono invece reversibili tutti e soli quegli spostamenti infinitesimi che portano ad un'altra posizione di confine. È quasi superfluo aggiungere che a partire da una posizione ordinaria ogni spostamento virtuale è reversibile.