Capitolo III

Sistemi di vettori applicati e geometria delle masse

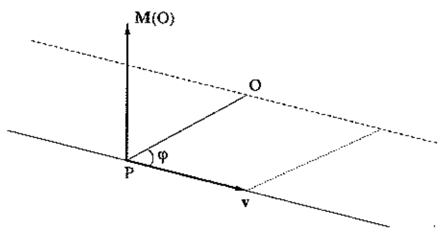
In questo capitolo ci occuperemo della teoria dei sistemi di vettori applicati. Nelle ultime due sezioni si introducono il baricentro di una distribuzione di masse e il momento d'inerzia di una distribuzione di masse rispetto ad un asse fissato. La distribuzione delle masse potrebbe essere discreta (trattandosi di un numero di masse puntuali) o continue (trattandosi di una densità di masse).

1 Definizioni

Consideriamo innanzitutto un solo vettore $(P, \vec{v})$ nello spazio e definiamone il suo momento rispetto ad un punto O. Passeremo poi a considerare un sistema di vettori applicati nello spazio.

Definizione III.1 Sia O un punto dello spazio e sia $(P, \vec{v})$ un vettore applicato. Si dice *momento* del vettore applicato $(P, \vec{v})$ rispetto al punto O il vettore (libero)

$$\vec{M}(O) = (P - O) \wedge \vec{v}.$$



Il punto O viene anche detto centro di riduzione o *polo*, ed il momento prende il nome di *momento polare.* I vettori $(P - O)$, $\vec{v}$ e $\vec{M}(O)$ costituiscono una terna positiva. Il modulo del momento è dato da

$$M(O) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{M}(O)| = \overline{PO}\, v \sin\varphi,$$

pari all'area del parallelogramma costruito sui vettori $(P, \vec{v})$ e $(P - O)$. È facile verificare le seguenti proprietà:

i) Il momento di $(P, \vec{v})$ rispetto ad O non varia se si sposta il vettore lungo la propria retta di azione.

ii) Il momento di $(P, \vec{v})$ rispetto ad O non varia se si sposta il punto O su una retta parallela a $\vec{v}$.

Fissata una retta r orientata di versore $\vec{u}$ e calcolato il momento di $(P, \vec{v})$ rispetto ad un punto O appartenente ad essa, si vede facilmente che lo scalare $M_u \stackrel{\text{def}}{=} \vec{M}(O) \cdot \vec{u}$ è indipendente dalla scelta di O su r. Tale scalare prende il nome di *momento assiale*.

Consideriamo ora un sistema S di vettori applicati $(P_i, \vec{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definizione III.2 Si dice *risultante* del sistema di vettori applicati S, il vettore (libero)

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i.$$

Definizione III.3 Si dice *momento risultante* del sistema di vettori applicati S rispetto al polo O, il vettore somma

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{v}_i. \qquad \text{(III.1)}$$

Analogamente a quanto fatto sopra, si può definire il *momento risultante assiale* $M_u = \vec{M}(O) \cdot \vec{u}$, $\vec{u}$ versore della retta assegnata.

Mediante la definizione (III.1) abbiamo costruito il campo vettoriale dei momenti relativo al sistema S, che associa ad ogni punto dello spazio $\mathbb{R}^3$ il vettore (libero) $\vec{M}(O)$. Per studiare il campo $O \mapsto \vec{M}(O)$ conviene indagare come varia il momento al variare del polo O.

2 Legge di variazione dei momenti

Valutiamo il momento risultante del sistema S rispetto ad un nuovo punto O':

$$\begin{aligned}\vec{M}(O') &= \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{v}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \\ &= \vec{M}(O) + (O - O') \wedge \vec{R}, \end{aligned} \tag{III.2}$$

dove $\vec{R}$ è il risultante del sistema dei vettori. La (III.2) è nota come formula di trasposizione dei momenti, che dà la legge di variazione del momento risultante del sistema S al variare del polo.

Dalla (III.2) si vede subito che $\vec{M}(O') = \vec{M}(O)$ se e solo se la retta tra O e O' è parallela al risultante $\vec{R} \neq \vec{0}$. Se invece $\vec{R} = \vec{0}$, allora $\vec{M}(O)$ è invariante al variare del polo O.

Moltiplicando l'ultima riga della (III.2) da $\vec{R}$ otteniamo

$$\vec{M}(O') \cdot \vec{R} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R} + \underbrace{(O - O') \wedge \vec{R} \cdot \vec{R}}_{=0} = \vec{M}(O) \cdot \vec{R}. \tag{III.3}$$

La (III.3) risulta invariante al variare di O ed è detta *invariante scalare* del sistema S. Indicato il componente di $\vec{M}(O)$ secondo la direzione del risultante con

$$\vec{M}_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{M}(O) \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R}, \tag{III.4}$$

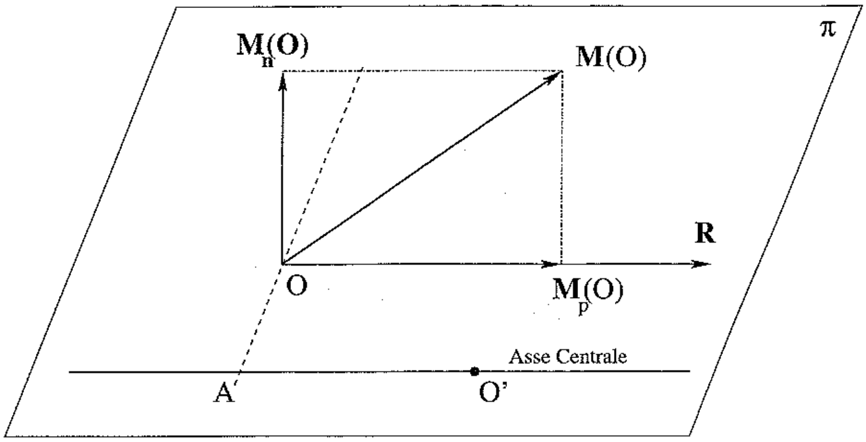
tale componente non varia al variare di O ed è detto *invariante vettoriale* del sistema S.

3 Asse centrale

Indicato $\vec{M}_n(O)$, il componente di $\vec{M}(O)$ normale alla direzione di $\vec{R}$, la formula (III.2) si può scrivere

$$\vec{M}(O') = \vec{M}_p + \vec{M}_n(O) + (O - O') \wedge \vec{R},$$

dove il termine di variazione $(O - O') \wedge \vec{R}$ influisce soltanto sulla parte normale $\vec{M}_n(O)$. Nasce spontanea la domanda se esistono punti dello spazio O', tali che $\vec{M}(O')$ si riduca alla sola parte parallela $\vec{M}_p$, cioè tale da aversi $\vec{M}(O') = \vec{M}_p$.



Si tratta quindi di studiare l'equazione vettoriale

$$\vec{M}_n(O) = (O' - O) \wedge \vec{R} \tag{III.5}$$

nell'incognita $(O' - O)$. Moltiplicando scalarmente per $(O' - O)$ la (III.5), si ha

$$\vec{M}_n(O) \cdot (O' - O) = (O' - O) \wedge \vec{R} \cdot (O' - O) = 0.$$

Quindi i punti O' soluzioni di (III.5) stanno su un piano normale ad $\vec{M}_n(O)$. Ciò ci suggerisce di rappresentare graficamente la situazione, tracciando un piano π per O e normale ad $\vec{M}_n(O)$. Il fatto che $\vec{R}$ ed $\vec{M}$ siano vettori liberi, ci consente di rappresentarli applicandoli in O. I punti O' stanno su π. Indicato con A quel particolare punto tale che $(A - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_n(O)$ e tale che $(A - O)$, $\vec{R}$ e $\vec{M}_n(O)$ costituiscono una terna destrorsa, tutti i punti che appartengono alla retta per A parallela ad $\vec{R}$ soddisfano la (III.5). Per la ricerca analitica di tale retta, detta *asse centrale*, è sufficiente individuare il punto A, tale che $(A - O) \cdot \vec{R} = 0$ e

$$(A - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_n(O). \tag{III.6}$$

Moltiplicando vettorialmente a destra per $\vec{R}$ la (III.6) si ottiene

$$\begin{aligned}
\vec{M}_n(O) \wedge \vec{R} &= [(A - O) \wedge \vec{R}] \wedge \vec{R} \\
&= \underbrace{[(A - O) \cdot \vec{R}]}_{=0}\vec{R} - [\vec{R} \cdot \vec{R}](A - O) \\
&= -R^2(A - O).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, risulta la seguente equazione per le coordinate del punto A:

$$(A - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_n(O)}{R^2} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2}. \tag{III.7}$$

L'asse centrale è la retta passante per A parallela ad $\vec{R}$, la cui equazione ha la forma vettoriale

$$(P - A) = \lambda \vec{R},$$

dove $P \equiv (x, y, z)$ è un punto generico dell'asse centrale ed $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ è dato da (III.7). In termini di coordinate, assunto O come origine delle coordinate, siano R_x, R_y e R_z le componenti di $\vec{R}$ che supponiamo tutte diverse da zero, l'equazione dell'asse centrale diventa

$$\frac{x - x_A}{R_x} = \frac{y - y_A}{R_y} = \frac{z - z_A}{R_z}, \qquad \text{(III.8)}$$

dove per $\vec{M}(O) = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ ed $R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$

$$x_A = \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R^2}, \quad y_A = \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R^2}, \quad z_A = \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R^2}.$$

Ricordando che l'asse centrale è il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al vettore risultante, si può anche ricavare l'equazione dell'asse centrale con il cosiddetto *metodo dei momenti*. Si consideri un punto generico P di coordinate (x, y, z) e si determini il momento risultante del sistema dei vettori S rispetto a tale punto:

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - P) \wedge \vec{v}_i.$$

Tale espressione è funzione delle coordinate generiche di P. Imporre che il punto P appartenga all'asse centrale equivale ad imporre il parallelismo tra il momento risultante

$$\vec{M}(x, y, z) = M_x(x, y, z)\vec{i} + M_y(x, y, z)\vec{j} + M_z(x, y, z)\vec{k}$$

ed il risultante $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$. In altre parole, se le componenti di $\vec{R}$ sono tutte diverse da zero, l'equazione dell'asse centrale diventa

$$\frac{M_x(x, y, z)}{R_x} = \frac{M_y(x, y, z)}{R_y} = \frac{M_z(x, y, z)}{R_z}.$$

Se $R_z = 0$ ma R_x e R_y sono diverse da zero, risulta

$$\frac{M_x(x, y, z)}{R_x} = \frac{M_y(x, y, z)}{R_y}, \qquad M_z(x, y, z) = 0.$$

Esempio III.4 *Dato il sistema di vettori applicati* $(A, 3\vec{i})$, $(O, 5\vec{j})$, *dove* $O \equiv (0,0,0)$ *ed* $A = (0,0,3)$, *determinare l'asse centrale, l'invariante scalare e l'invariante vettoriale.*

Il risultante $\vec{R} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Calcoliamo il momento del sistema rispetto al punto A:

$$\vec{M}(A) = (O - A) \wedge 5\vec{j} = (-3\vec{k}) \wedge (5\vec{j}) = 15\vec{i}.$$

L'invariante scalare (che non dipende da A) si ottiene moltiplicando scalarmente per $\vec{R}$:

$$\vec{M}(A) \cdot \vec{R} = 15\vec{i} \cdot (3\vec{i} + 5\vec{j}) = 45;$$

l'invariante vettoriale è quindi

$$M_p = \frac{\vec{M}(A) \cdot \vec{R}}{R^2}\vec{R} = \frac{45}{34}(3\vec{i} + 5\vec{j}).$$

Inoltre,

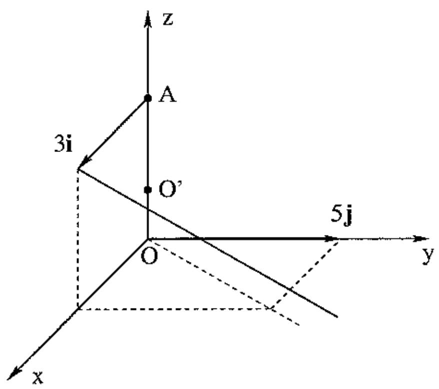
$$\vec{M}(O) = \vec{M}(A) + (A - O) \wedge \vec{R} = 15\vec{i} + 3\vec{k} \wedge (3\vec{i} + 5\vec{j}) = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{i} = 9\vec{j}.$$

Un punto O' dell'asse centrale è individuato da

$$(O' - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{R^2} = \frac{(3\vec{i} + 5\vec{j}) \wedge 9\vec{j}}{34} = \frac{27}{34}\vec{k},$$

quindi $O' = (0, 0, \frac{27}{34})$. L'asse centrale è la retta passante per tale punto e parallela ad $\vec{R}$, di equazioni:

$$5x - 3y = 0, \qquad z = \frac{27}{34}. \tag{III.9}$$



Risolviamo ora lo stesso esercizio con il metodo dei momenti. Sia $P = (x, y, z)$ il punto generico rispetto al quale si determina il momento risultante. Si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{M}(P) = \vec{M}(x,y,z) &= (A-P)\wedge 3\vec{\imath} + (O-P)\wedge 5\vec{\jmath} \\
&= (-x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + (3-z)\vec{k})\wedge 3\vec{\imath} + (-x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - z\vec{k})\wedge 5\vec{\jmath} \\
&= \vec{0} + 3y\vec{k} + 3(3-z)\vec{\jmath} - 5x\vec{k} + \vec{0} + 5z\,\vec{\imath} \\
&= 5z\vec{\imath} + 3(3-z)\vec{\jmath} + (3y-5x)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Imponendo il parallelismo con $\vec{R} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$, si ha

$$\frac{5z}{3} = \frac{9-3z}{5}, \qquad 3y - 5x = 0,$$

da cui si trova la (III.9).

Esempio III.5 *Dato il sistema di vettori applicati* $(A, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $(B, 3\vec{\jmath})$, *dove* $A \equiv (0,0,1)$ *ed* $B = (0,0,2)$, *determinare l'asse centrale, l'invariante scalare e l'invariante vettoriale.*

Il risultante è $\vec{R} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$. Il momento del sistema rispetto ad O risulta

$$\vec{M}(O) = \vec{k}\wedge(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) + 2\vec{k}\wedge 3\vec{\jmath} = \vec{k}\wedge(\vec{\imath}+7\vec{\jmath}) = -7\vec{\imath}+\vec{\jmath}.$$

L'invariante scalare si ottiene moltiplicando scalarmente per $\vec{R}$:

$$\vec{M}(O)\cdot\vec{R} = (-7\vec{\imath}+\vec{\jmath})\cdot(\vec{\imath}+4\vec{\jmath}) = -7+4 = -3.$$

Un punto O' dell'asse centrale è individuato da

$$(O'-O) = \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}(O)}{R^2} = \frac{(\vec{\imath}+4\vec{\jmath})\wedge(-7\vec{\imath}+\vec{\jmath})}{17} = \frac{29}{17}\vec{k},$$

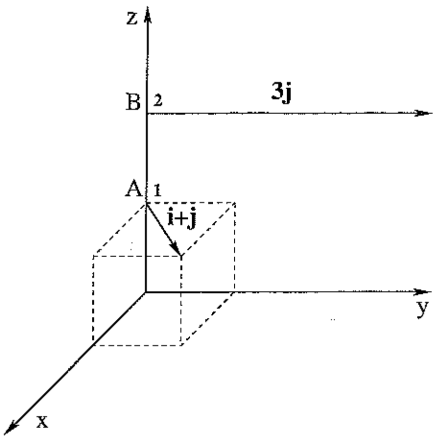
dunque $O' = (0, 0, \frac{29}{17})$. L'asse centrale è la retta passante per O' e parallela ad $\vec{R}$, di equazioni:

$$4x - y = 0, \qquad z = \frac{29}{17}. \tag{III.10}$$

Utilizziamo ora il metodo dei momenti. Sia $P = (x, y, z)$ un punto generico. Allora il momento rispetto a tale punto dato da

$$
\begin{aligned}
\vec{M}(P) &= (A-P)\wedge(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) + (B-P)\wedge(3\vec{\jmath}) \\
&= (-x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + (1-z)\vec{k})\wedge(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) + (-x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + (2-z)\vec{k})\wedge(3\vec{\jmath}) \\
&= (4z-7)\vec{\imath} + (1-z)\vec{\jmath} + (-4x+y)\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Imponendo il parallelismo con $\vec{R} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ si ottengono le equazioni (III.10).



Esempio III.6 *Siano* $\vec{v}_1 = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{v}_3 = \vec{\jmath}$ *tre vettori applicati rispettivamente in* $P_1 = (-1, 0, 2)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$; *determinarne l'asse centrale.*

Poichè $P_1 - P_2 = -2\vec{v}_1$ e $P_3 - P_2 = \vec{v}_3$, le direzioni dei tre vettori sono concorrenti in P_2. Quindi $\vec{M}(P_2) = \vec{0}$ e l'asse centrale passa per P_2 ed è parallelo al risultante $\vec{R} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, di equazioni:

$$3x - 2y = 3, \qquad y + 3z = 0.$$

Esempio III.7 *Siano* $\vec{v}_1 = -\vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = -2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{v}_3 = 2\vec{\jmath}$, $\vec{v}_4 = -2\vec{\jmath} - \vec{k}$ *quattro vettori applicati rispettivamente in* $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 0, 1)$, $P_3 = (1, 2, 1)$, $P_4 = (1, 0, 0)$; *determinarne l'asse centrale.*

Il risultante $\vec{R} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$. Il momento rispetto all'origine è

$$\vec{M}(O) = (-\vec{\imath} - \vec{k}) \wedge \vec{k} + (-2\vec{\jmath} + \vec{k}) \wedge \vec{k} + 2\vec{\jmath} \wedge (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}) + (-2\vec{\jmath} - \vec{k}) \wedge \vec{\imath} = \vec{0}.$$

Dunque l'asse centrale passa per l'origine ed è parallelo ad $\vec{R}$, di equazioni:

$$x + 2y - 5z = 0, \qquad x - y + z = 0.$$

Esempio III.8 *Siano* $\vec{v}_1 = 2\vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{v}_3 = \vec{\jmath}$ *tre vettori applicati rispettivamente in* $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$; *determinarne l'asse centrale.*

Risolviamo questo esercizio per il metodo dei momenti. Il risultante è $\vec{R} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Sia $P = (x, y, z)$ un punto generico. Allora

$$\begin{aligned}
\vec{M}(P) &= 2\vec{k} \wedge [(1-x)\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + (1-z)\vec{k}] + (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) \wedge [(1-x)\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - z\vec{k}] \\
&\quad + \vec{\jmath} \wedge [(1-x)\vec{\imath} + (1-y)\vec{\jmath} - z\vec{k}] \\
&= [2(1-x)\vec{\jmath} + 2y\,\vec{\imath}] + [-y\vec{k} + z\vec{\jmath} + 2(x-1)\vec{k} - 2z\,\vec{\imath}] + [(x-1)\vec{k} - z\,\vec{\imath}] \\
&= (2y - 3z)\vec{\imath} + (2 - 2x + z)\vec{\jmath} + (3x - y - 3)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Imponendo il parallelismo ad $\vec{R}$ otteniamo le seguenti equazioni dell'asse centrale:

$$2y - 3z = \frac{1}{3}(2 - 2x + z) = \frac{1}{2}(3x - y - 3).$$

4 Sistemi equivalenti e sistemi equilibrati

Premettiamo la seguente

Definizione III.9 Dati due sistemi di vettori applicati $S = \{(P_i, \vec{v}_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ ed $S' = \{(P'_j, \vec{v}_j) : j = 1, 2, \ldots, m\}$; indicati con $\vec{R}$, $\vec{M}(O)$ ed $\vec{R}'$, $\vec{M}'(O)$ rispettivamente risultante e momento risultante dei due sistemi rispetto ad un punto fissato O dello spazio, si dice che S e S' sono *equivalenti* se

$$\vec{R} = \vec{R}', \qquad \vec{M}(O) = \vec{M}'(O).$$

La definizione non dipende in realtà dalla scelta del punto O. Infatti, se $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}(O) = \vec{M}'(O)$ ed O' è un altro polo, allora

$$\vec{M}(O') = \vec{M}(O) + (O - O') \wedge \vec{R} = \vec{M}'(O) + (O - O') \wedge \vec{R}' = \vec{M}'(O').$$

Si può passare da un sistema di vettori applicati ad un altro ad esso equivalente, mediante una successione di operazioni che non mutano né il risultante né il momento risultante. Tali operazioni prendono il nome di *operazioni elementari*. Introduciamo le operazioni elementari fondamentali:

i) aggiunta e soppressione di una coppia di braccio nullo;

ii) sostituzione di più vettori concorrenti con il loro risultante applicato nel punto di concorrenza e viceversa.

Ad esempio, sappiamo che i vettori possono essere spostati lungo le loro rette di azione, senza cambiare né il risultante, né il momento risultante. Ciò corrisponde all'aggiunta e alla soppressione di opportune coppie di braccio nullo sulle rette di azione dei vettori.

Definizione III.10 Un sistema di vettori applicati si dice *equilibrato*, se

$$\vec{R} = \vec{0}, \qquad \vec{M}(O) = \vec{0}.$$

Segue immediatamente il teorema:

Teorema III.11 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia equilibrato è che esso sia equivalente al solo vettore nullo.*

È interessante a questo punto esaminare quale sia il minor numero di vettori a cui si possa ridurre un qualsiasi sistema di vettori applicati. Cosí facendo saremo in grado di caratterizzare completamente il campo vettoriale che associa ad ogni punto dello spazio O il momento rispetto ad O del sistema dei vettori applicati.

I sistemi che hanno risultante nullo, come abbiamo visto, hanno l'asse centrale indeterminato. Tali sistemi si riducono al vettore nullo nel caso in cui il sistema sia equilibrato. Se $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$, si riducono ad una qualunque coppia avente momento $\vec{M}(O)$.

I sistemi a risultante non nullo, caratterizzati dall'invariante scalare nullo ($\vec{M}_p = \vec{0}$), si riducono ad un solo vettore: il risultante applicato in un qualsiasi punto dell'asse centrale. Discutiamo ora tre particolari classi di tali sistemi (aventi cioé risultante non nullo e $\vec{M}_p = \vec{0}$):

a) **Vettori concorrenti**: I vettori hanno le loro rette d'azione concorrenti in uno stesso punto C; ciascuno di essi può essere traslato lungo la propria retta d'azione fino ad essere applicato in C. Poi, si può sostituire ad ogni coppia di vettori il loro risultante e ripetere questa operazione tante volte fino ad ottenere il risultante dell'intero sistema applicato in C.

   Teorema III.12 (di Varignon) *Il momento risultante di un sistema di vettori concorrenti rispetto ad un punto O è uguale al momento rispetto ad O del risultante pensato applicato nel punto di concorrenza.*

b) **Vettori paralleli**: Dato un sistema di vettori $(P_i, \vec{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, con $\vec{v}_i = v_1\vec{u}$, $\vec{u}$ versore fissato, allora il risultante $\vec{R}$ è dato da $R\vec{u}$, dove $R = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Il momento di ciascun vettore rispetto ad un punto O dello spazio risulta normale ad $\vec{u}$, quindi $\vec{M}_p = \vec{0}$. Questa classe di vettori si può pensare come caso limite di vettori concorrenti, in cui il punto di concorrenza è all'infinito.

c) **Vettori complanari**: Si consideri un sistema di vettori $(P_i, \vec{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in un piano π e sia O un qualsiasi punto appartenente al piano. In questo caso i momenti $\vec{M}_i(O)$ di ciascun vettore $\vec{v}_i$ sono normali al piano π. D'altra parte il risultante $\vec{R}$ o è nullo od è parallelo al piano, e quindi $\vec{M}_p = \vec{0}$.

Si osservi che, in questi casi, il sistema ha rispetto ai punti dell'asse centrale il momento risultanto nullo, quindi il risultante $\vec{R}$ applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale costituisce un sistema equivalente a quello dato. Si noti che il risultante viene cosí ad essere applicato in un punto di un elemento intrinseco del sistema, quale in realtà è l'asse centrale.

In generale, *un sistema di vettori applicati*, a risultante non nullo e ad invariante scalare non nullo, *è riducibile al risultante* $\vec{R}$ *applicato in un punto dell'asse centrale e ad una coppia in un piano normale all'asse centrale di momento pari ad* $\vec{M}_p$. Tale coppia serve a generare quel componente del campo vettoriale dei momenti parallelo alla direzione di $\vec{R}$ che non varia al variare del polo dei momenti.

Siamo ora in grado di rappresentare il *campo vettoriale dei momenti* di un sistema S su un qualsiasi piano normale alla direzione dell'asse centrale. Ricordando la scomposizione $\vec{M}(O) = \vec{M}_p + \vec{M}_n(O)$, il campo risulta essere simmetrico rispetto all'asse centrale stesso.

Infine arriviamo al seguente schema riepilogativo:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{M}(O) = \vec{0} \Longrightarrow \text{Sistema equilibrato.} \\ \vec{M}(O) \neq \vec{0} \Longrightarrow \text{Il sistema si riduce ad una coppia di vettori.} \end{cases}}$$

$$\boxed{\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{M}_p = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Ad es.: Vettori concorrenti, paralleli,} \\ \text{complanari. Il sistema si riduce a } \vec{R} \\ \text{applicato sull'asse centrale.} \end{cases} \\ \vec{M}_p \neq \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Caso generale. Il sistema si riduce a} \\ \vec{R} \text{ applicato sull'asse centrale} \\ \text{più una coppia sul piano ortogonale ad } \vec{R}. \end{cases} \end{cases}}$$

5 Vettori paralleli

La classe dei vettori paralleli riveste una particolare importanza nelle applicazioni. Dedichiamo quindi ad essi questo paragrafo.

Prendiamo in considerazione un sistema di vettori $(P_i, \vec{f}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, con $\vec{f}_i = f_i\vec{u}$, $\vec{u}$ versore fissato. Allora il risultante $\vec{F}$ è dato da $F\vec{u}$, dove $F = \sum_{i=1}^n f_i$. In questo caso il sistema è riducibile ad un solo vettore o ad una coppia, a seconda che il risultante $\vec{F}$ sia diverso da zero o nullo. Supponendo $\vec{F} \neq \vec{0}$, l'invariante scalare si annulla. Definiamo *centro dei vettori paralleli* il punto C dato da

$$F(C - O) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P_i - O). \qquad \text{(III.11)}$$

È facile dimostrare il seguente teorema:

Teorema III.13 *Dato un sistema di vettori paralleli con* $F \neq 0$, *sia* O *un punto generico. Allora il punto* C *definito da* (III.11) *gode delle seguenti proprietà:*

i) C non dipende dalla scelta dell'origine O;

ii) C non dipende dalla scelta del versore $\vec{u}$;

iii) C non cambia se tutte le ampiezze f_i vengono moltiplicate dalla stessa costante diversa da zero;

iv) C appartiene all'asse centrale.

Dimostrazione. i) Sia C' il centro dei vettori paralleli corrispondente al punto di riferimento O'. Allora

$$\begin{aligned} F(C'-O') &= \sum_{i=1}^{n} f_i(P_i - O') \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(P_i - O) + \sum_{i=1}^{n} f_i(O - O') \\ &= F(C-O) + F(O-O') = F(C-O'). \end{aligned}$$

Di conseguenza, $C = C'$.

ii) Si vede subito che la (III.11) non contiene il versore $\vec{u}$.

iii) È chiaro che F viene trasformato in αF se ogni f_i viene trasformato in αf_i. Applicando la (III.11) e utilizzando che $\alpha \neq 0$, si arriva allo stesso centro dei vettori paralleli C.

iv) Calcolando il momento rispetto a C si ha

$$\vec{M}(C) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - C) \wedge \vec{f_i} = \sum_{i=1}^{n} f_i(P_i - C) \wedge \vec{u} = F(C-C) \wedge \vec{u} = \vec{0}.$$

Quindi C appartiene all'asse centrale. □

6 Baricentri

Si chiama *baricentro* di un sistema particellare il centro di un qualunque sistemi di vettori paralleli, concordi e di modulo proporzionale alle masse, applicati nei punti del sistema. Se si trovano nei punti $P_1, \ldots, P_n$ le masse $m_1, \ldots, m_n$, allora il baricentro G è data da

$$OG = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} m_j OP_j,$$

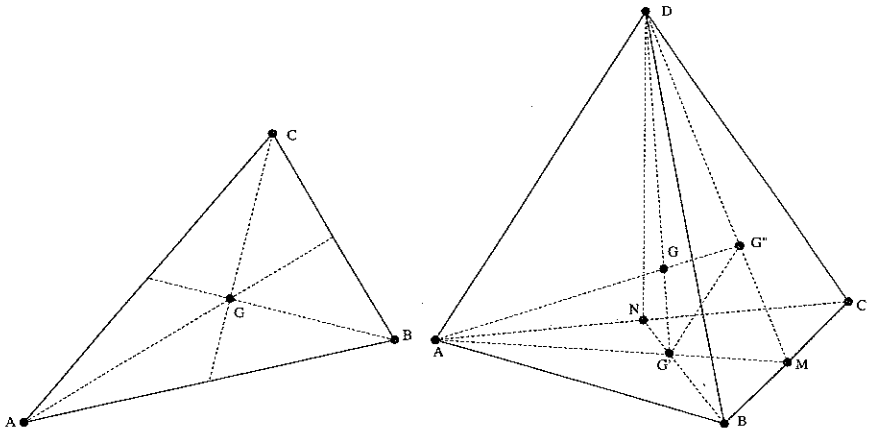


Figura III.1: Pannello sinistro: Baricentro G per tre masse uguali situate nei vertici di un triangolo. Pannello destro: Baricentro G per quattro masse uguali disposte nei vertici di un tetraedro.

dove $m = m_1 + \ldots + m_n$ è la massa totale del sistema. Se $(x_,y_j, z_j)$ sono le coordinate cartesiane del punto P_j, allora le coordinate coordinate del baricentro G sono date dalle espressioni

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j, \quad y_G = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j y_j, \quad z_G = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j z_j.$$

Nel caso in cui tutte le masse sono uguali ($m_1 = \ldots = m_n = (m/n)$), si ha

$$x_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad y_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j, \quad z_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j.$$

Nel caso di tre masse uguali il baricentro (anche detto baricentro del triangolo) coincide con la intersezione delle tre mediane e dista da ognuno dei vertici dei due terzi della lunghezza della mediana uscente da quel vertice. Nel caso di quattro masse uguali il baricentro (anche detto baricentro del tetraedro) si trova sulla congiungente di ognuno dei vertici con il baricentro della faccia opposta e dista dal vertice dei $\frac{3}{4}$ dell'intero segmento congiungente.

Nel caso di un sistema continuo occupante la regione C il baricentro si definisce mediante la densità di massa $\mu(x, y, z)$. In tal caso

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m}\iiint_C x\mu(x,y,z)\,dxdydz, \\ y_G &= \frac{1}{m}\iiint_C y\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \\ z_G &= \frac{1}{m}\iiint_C z\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Nel caso in cui la massa è concentrata nel piano xy, il baricentro si definisce mediante la densità di massa $\mu(x, y)$ bidimensionale. In tal caso

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{m} \iint_C x\mu(x, y)\, dx\, dy, \\
y_G &= \frac{1}{m} \iint_C y\mu(x, y)\, dx\, dy, \\
z_G &= 0,
\end{aligned}$$

dove C è la regione del piano xy occupata dalle masse.

Il prossimo risultato ci consente a calcolare facilmente il baricentro di un sistema per cui la densità è costante a pezzi.

Teorema III.14 *Se si divide il sistema C in N sistemi parziali $c_1, \ldots, c_N$, il suo baricentro coincide con quello dei baricentri $G_1, \ldots, G_N$ di $c_1, \ldots, c_N$ quando si attribuiscono ad essi le masse $m^{(1)}, \ldots, m^{(N)}$ di $c_1, \ldots, c_N$.*

Dimostrazione. Sia $\mu(x, y, z)$ la densità di massa del sistema C. Allora per ogni sistema parziale c_r si ha

$$\begin{aligned}
m^{(r)} &= \iiint_{c_r} \mu(x, y, z)\, dxdydz, \\
OG_r &= \frac{1}{m^{(r)}} \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z)\, dxdydz,
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_C \mu(x, y, z)\, dxdydz = m^{(1)} + \ldots + m^{(N)}, \\
OG &= \frac{1}{m} \iiint_C (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z)\, dxdydz \\
&= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{N} \iiint_{c_r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\mu(x, y, z)\, dxdydz \\
&= \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{N} m^{(r)}\, OG_r,
\end{aligned}$$

il quale conclude la dimostrazione. □

Va notato che il baricentro si trova nell'insieme convesso più piccolo che contiene tutte le masse.

Esempio III.15 Calcoliamo il baricentro di un disco di raggio R con il centro situato all'origine per cui la parte superiore ha densità costante μ_1 e quella inferiore ha densità costante μ_2. Infatti, siano c_1 e c_2 le parti superiore e inferiore. Allora le masse delle due parti sono $m_1 = \frac{1}{2}\pi\mu_1 R^2$ e $m_2 = \frac{1}{2}\pi\mu_2 R^2$. Le coordinate x dei baricentri sono $x_{G_1} = x_{G_2} = 0$. Inoltre,

$$m_1 y_{G_1} = \mu_1 \int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \mu_1 \int_{-R}^{R} dx\, \tfrac{1}{2}(R^2 - x^2) = \tfrac{2}{3}\mu_1 R^2,$$
$$m_2 y_{G_2} = \mu_2 \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} y\,dy = \mu_2 \int_{-R}^{R} dx\, \tfrac{-1}{2}(R^2 - x^2) = -\tfrac{2}{3}\mu_2 R^2.$$

Quindi

$$x_G = 0, \qquad y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3\pi}\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

7 Momenti d'inerzia

Si definisce *momento d'inerzia* I di un qualunque sistema particellare rispetto ad una retta r la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle distanze dei loro punti di applicazione dalla retta. Infatti, detta m_j la massa situata nel punto P_j del sistema e δ_j la sua distanza dalla retta r, si ha

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta_j^2.$$

Nel caso di un sistema continuo C di densità μ si chiama invece momento d'inerzia rispetto alla retta r il corrispondente integrale

$$I = \iiint_C \mu(x,y,z)\delta(x,y,z)^2\, dxdydz,$$

dove δ denota la distanza del punto generico P di C da r.

Il prossimo teorema, quello di Huygens, ci consente a sostituire la retta r da una parallela ad essa quando si calcola il momento d'inerzia.

Teorema III.16 (Huygens) *Il momento d'inerzia di un qualunque sistema materiale C rispetto ad una retta r è uguale a quello rispetto alla parallela r_G ad r condotta per il baricentro di C aumentato dal prodotto della massa totale di C per il quadrato della distanza di r da r_G.*

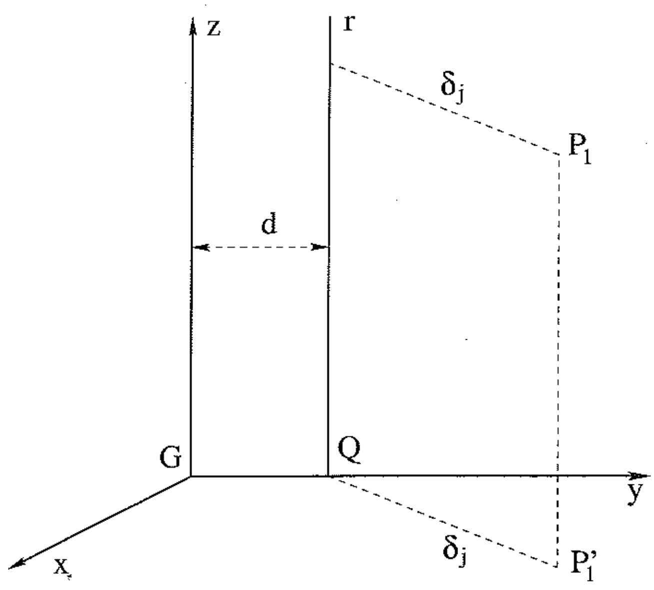


Figura III.2: Illustrazione del Teorema di Huygens sui momenti d'inerzia.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso bidimensionale, dove le masse si trovano tutte nel piano xy. Adottiamo le notazioni della Figura III.2. Supponiamo che le N masse $m_1, \ldots, m_N$ si trovino nei punti $P_1, \ldots, P_N$ di coordinate $(x_j, y_j, 0)$, dove $j = 1, 2, \ldots, N$. Allora

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{N} m_j[x_j^2 + (y_j - d)^2] \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j(x_j^2 + y_j^2) + d^2 \sum_{j=1}^{N} m_j - 2d \sum_{j=1}^{N} m_j y_j \\ &= I_G + md^2 - 2\frac{d}{m} y_G \\ &= I_G + md^2, \end{aligned}$$

poichè il baricentro si trova nel piano xz e quindi $y_G = 0$. □

Studiamo adesso come varia il momento d'inerzia quando r cambia di direzione passando sempre per un punto O. Siano α, β e γ i cosini direttori di r rispetto alla terna di riferimento che supponiamo di origine O. Sia Q_j la proiezione del generico punto P_j del sistema sulla retta r (vedi la Fig. III.3). Allora

$$\delta_j^2 = |OP_j|^2 - |OQ_j|^2,$$

dove, per $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$|OQ_j| = |\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j|, \qquad |OP_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}.$$

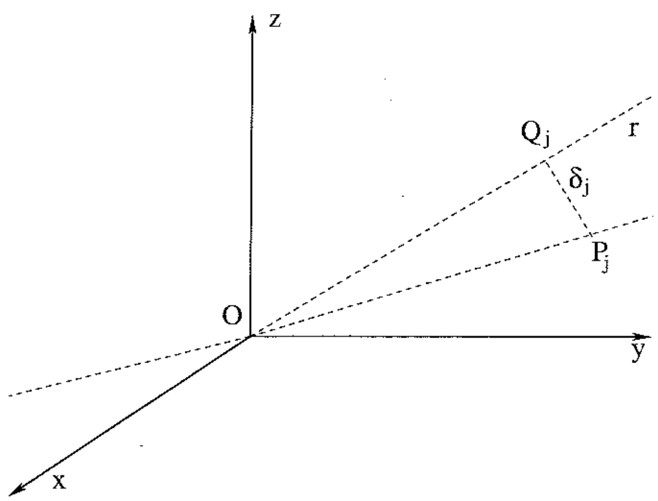


Figura III.3: Illustrazione dei momenti d'inerzia rispetto ad assi concorrenti.

Quindi

$$\delta_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - (\alpha x_j + \beta y_j + \gamma z_j)^2.$$

Di conseguenza,

$$\delta_j^2 = (y_j^2 + z_j^2)\alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2)\beta^2 + (x_j^2 + y_j^2)\gamma^2 - 2x_j y_j \alpha\beta - 2x_j z_j \alpha\gamma - 2y_j z_j \beta\gamma.$$

Ponendo

$$A = \sum_{j=1}^{N} m_j (y_j^2 + z_j^2) \quad B = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + z_j^2) \quad C = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2),$$
$$A' = \sum_{j=1}^{N} m_j y_j z_j, \qquad B' = \sum_{j=1}^{N} m_j x_j z_j, \qquad C' = \sum_{j=1}^{N} m_j x_j y_j,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{N} m_j \delta_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N} m_j \left\{ (y_j^2 + z_j^2)\alpha^2 + (x_j^2 + z_j^2)\beta^2 + (x_j^2 + y_j^2)\gamma^2 \right. \\ &\left. - 2x_j y_j \alpha\beta - 2x_j z_j \alpha\gamma - 2y_j z_j \beta\gamma \right\} \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2C'\alpha\beta \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove la matrice 3×3 è hermitiana e positiva semidefinita.

Nel caso di una distribuzione di masse continua bisogna definire le costanti A, B, C, A', B' e C' nel seguente modo:

$$A = \iiint_C \mu(y^2 + z^2)\, dxdydz, \quad B = \iiint_C \mu(x^2 + z^2)\, dxdydz,$$
$$C = \iiint_C \mu(x^2 + y^2)\, dxdydz, \quad A' = \iiint_C \mu yz\, dxdydz,$$
$$B' = \iiint_C \mu xz\, dxdydz, \quad C' = \iiint_C \mu xy\, dxdydz.$$