

CAPITOLO VII

DINAMICA DEI SOLIDI GENERALITÀ - PROBLEMI ELEMENTARI .

§ 1. — Equazioni cardinali.

1. Dalle teorie generali esposte nei Cap. V e VI ci proponiamo di trarre i principî fondamentali e le vedute direttive per lo studio della Dinamica dei solidi, la quale, per la natura stessa dei problemi fisici che vi si schematizzano, dà luogo a sviluppi e a risultati non meno notevoli per interesse teorico che per importanza applicativa.

In questo Capitolo, dopo avere stabilito le equazioni generali che reggono tutta la Dinamica dei sistemi rigidi, ci occuperemo in modo particolare dei casi più semplici, cioè dei solidi girevoli intorno ad un asse o mobili parallelamente ad un piano fisso; e rimanderemo ai due Capitoli susseguenti le classiche questioni relative al moto di un solido intorno ad un suo punto con le loro applicazioni ai giroscopi (Cap. VIII) e alcuni problemi tipici di rotolamento (Cap. IX), finendo con un cenno sulle ricerche del VOLTERRA intorno ai sistemi rigidi con moti ciclici interni.

2. Per un qualsiasi solido S , comunque vincolato e sollecitato, valgono istante per istante, durante tutto il moto, come per ogni altro tipo di sistema materiale, le due equazioni cardinali (V, n. 16)

$$(1) \quad \frac{dQ}{dt} = R ,$$

$$(2) \quad \frac{dK}{dt} + v' \wedge Q = M ,$$

dove, come ben sappiamo, si denotano con Q e K il risultante e il momento risultante delle quantità di moto del solido rispetto ad un punto qualsiasi, con v' la velocità (assoluta) di questo punto e, infine, con R ed M il risultante e il momento risultante, rispetto al medesimo centro, di tutte e sole le forze esterne agenti sul solido. Chè se, come centro di riduzione, si assume, anzichè un punto mobile qualsiasi, un punto fisso [rispetto alla terna galileiana di riferimento meccanico] ($v' = 0$) o il baricentro del solido (v' parallelo a Q) la seconda equazione cardinale si riduce, con lo stesso significato dei simboli, alla forma più semplice

$$(2') \quad \frac{dK}{dt} = M.$$

Ma nella presente ipotesi della rigidità del sistema S si presenta una circostanza analoga a quella rilevata nella Statica per le equazioni cardinali dell'equilibrio, nei riguardi dei solidi (XIII₁, § 2): Si ha, cioè, nelle equazioni cardinali (1), (2) o (1), (2') non soltanto un sistema di equazioni necessariamente verificate durante tutto il moto del solido, ma addirittura un insieme di condizioni sufficienti a individuare (per date condizioni iniziali) codesto moto.

Per convincersene basta esaminare i vari casi tipici, che si presentano nel moto di un solido libero o vincolato. Limitiamoci qui a considerare successivamente un solido libero e un solido con un punto o con un asse fisso.

Nel primo caso le equazioni cardinali (1), (2) o (1), (2'), proiettate sugli assi di riferimento, forniscono sei equazioni scalari, cioè precisamente tante, quanti sono i gradi di libertà del solido.

Se si tratta, invece, di un solido fissato in un punto O , e perciò avente tre gradi di libertà, figurano fra i dati della questione, come già nel caso statico (XIII₁, n. 5), le forze esterne direttamente applicate, ma non la reazione che si suscita nel punto fisso, cosicchè va ritenuto noto (o, più precisamente, esprimibile in funzione della posizione e dell'atto di moto del corpo) il momento risultante M delle forze esterne rispetto ad O , mentre il risultante R è a priori incognito, in quanto vi porta contributo la incognita reazione nel punto

fisso. Ma solo M compare nella seconda equazione cardinale, riferita ad O , cosicchè proiettandola sugli assi otteniamo tre equazioni scalari sufficienti a definire il moto del sistema.

Infine se il solido ha un asse fisso, trattandosi di un sistema con un solo grado di libertà, basta una sola equazione a definire in funzione del tempo l'unico parametro lagrangiano (angolo di orientazione intorno all'asse); e una tale equazione, implicante solo le forze applicate e non le reazioni che si destano lungo l'asse, è fornita, anche qui come nel caso statico (XIII₁, nn. 6-10), dall'equazione scalare dei momenti secondo l'asse fisso.

In base alle precedenti considerazioni le equazioni cardinali si possono anche chiamare le equazioni dinamiche del moto dei solidi.

3. RIFERIMENTO AD ASSI MOBILI CON LEGGE QUALSIASI. —

È appunto nella Dinamica dei solidi che, secondo quanto si è detto al n. 17 del Cap. V, torna più spesso utile riferire le equazioni cardinali, anzichè ad una terna galileiana, ad una terna $Oxyz$, mobile nello spazio con legge a priori arbitraria; con che codeste equazioni assumono la forma

$$(3) \quad \dot{Q} + \omega' \wedge Q = R,$$

$$(4) \quad \dot{K} + v' \wedge Q + \omega' \wedge K = M,$$

dove si denotano con \dot{Q} , \dot{K} le derivate temporali di Q e K rispetto ad $Oxyz$, con ω' la velocità angolare della terna mobile, rispetto alla primitiva terna galileiana, e, come dianzi, con v' la velocità del centro di riduzione dei momenti. E, se questo centro di riduzione si sceglie precisamente nell'origine O della terna mobile, v' ed ω' sono i vettori caratteristici del moto (assoluto) di questa terna (l. c.).

Naturalmente questo moto della terna di riferimento $Oxyz$ va prefissato caso per caso in quel modo che meglio conviene al problema che si ha in vista. Qui, in via generale, non possiamo aggiungere se non due osservazioni del tutto ovvie, ma altrettanto importanti.

Anzitutto se, come già al n. prec., il centro di riduzione dei momenti si fa coincidere col baricentro del solido ($v' \wedge Q = 0$)

o, trattandosi di un solido fissato in un punto, in questo punto fisso ($v' = 0$), la seconda equazione cardinale (riferita agli assi mobili) assume la forma più semplice

$$(4') \quad \dot{K} + \omega' \wedge K = M.$$

In secondo luogo notiamo che la legge più semplice e, per così dire, più naturale per il moto della terna di riferimento $Oxyz$ si ha assumendo questa terna invariabilmente connessa col solido o, come più brevemente diremo, *solidale*. Anche in tale ipotesi valgono, a seconda della scelta del centro di riduzione dei momenti, le (3), (4) o le (3'), (4'); ma in ogni caso il vettore ω' denota qui la velocità angolare (assoluta) del solido stesso.

Altri riferimenti mobili non soltanto nello spazio ma anche rispetto al corpo verranno caratterizzati al § 8 del Cap. VIII, e di queste diverse modalità di impostazione avremo svariate occasioni di valerci nel seguito di questo Cap. e soprattutto nei Cap. VIII e IX.

§ 2. — Cenni di cinetostatica dei sistemi rigidi.

4. Dal punto di vista tecnico, il problema del calcolo delle reazioni e, quindi, dei *cimenti dinamici*, cui abbiamo accennato al n. 28 del Cap. V, acquista il suo massimo interesse nel caso di un sistema rigido o, più in generale, di una parte rigida di un sistema materiale più complesso. Per convincersene basta riflettere quanto importi ai costruttori meccanici il conoscere i cimenti, che si esercitano in un pezzo C di una macchina, sia in condizioni di regime, che in condizioni di avviamento o di sovraccarichi accidentali, in causa dei vincoli (appoggi, attacchi, incastri, assi, perni, ...) che stabiliscono il collegamento di C colle altre parti della macchina.

In condizioni di equilibrio, il calcolo delle reazioni si è già effettuato nella Statica elementare per vari tipi di solidi vincolati (XIII₁, §§ 3, 4) e già allora si è riconosciuto come, sulla base della schematizzazione puramente meccanica, non si pervenga in generale alla determinazione univoca della distribuzione locale delle reazioni, bensì soltanto a individuarne

gli elementi caratteristici di insieme, cioè il *risultante* e il *momento risultante* (rispetto ad un dato centro di riduzione). E si è pur notato come una tale *indeterminazione delle singole reazioni* non si possa togliere se non uscendo dai confini della Meccanica dei corpi rigidi per entrare in quelli della Teoria della elasticità, in cui si tien conto delle lievi deformazioni che nei solidi naturali si determinano per effetto delle sollecitazioni.

Ben si comprende come analoghe circostanze debbano presentarsi anche nel caso dinamico di cui intendiamo qui occuparci, sia pur rapidamente; onde appare giustificato di limitare a priori il problema dei cimenti nei solidi al calcolo del loro risultante e del loro momento risultante.

Ora è facile riconoscere che la determinazione di questi elementi globali è pressochè immediata ogni qual volta:

- siano assegnate, come già nella Statica, le forze attive;
- sia inoltre completamente conosciuto il moto del sistema.

Notiamo subito, come già al citato n. 28 del cap. V, che, mentre l'ipotesi a) è sempre soddisfatta in base ai dati diretti del problema meccanico, la b) implica per lo più la preventiva integrazione di un sistema differenziale, la quale costituisce per se stessa il problema più importante e generalmente più difficile della Dinamica. Ma basta pensare ai casi tecnicamente più semplici e comuni (volano, bilancere, biella, ecc.) per comprendere come spesso il moto del sistema rigido, cui si vuole riferirsi, si possa ritenere direttamente conosciuto.

Ammettiamo, dunque, soddisfatte entrambe le condizioni a) e b); e nell'insieme delle forze esterne agenti sul dato sistema rigido S distinguiamo quelle direttamente applicate, di cui per l'ipotesi a) possiamo ritenere conosciuti il risultante R e il momento risultante M rispetto ad un punto O , che supporremo coincidente col baricentro o fisso, e, d'altra parte, le incognite reazioni, di cui denoteremo con R ed M gli analoghi vettori.

Le equazioni cardinali (1) e (2') (quest'ultima riferita al polo baricentrale o fisso O) danno senz'altro le due equazioni;

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = -\mathbf{R} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \\ \mathbf{M} = -\mathbf{M} + \frac{d\mathbf{K}}{dt}, \end{cases}$$

le quali risolvono la questione ed, ove si pensino riferite ai cimenti (direttamente opposti alle reazioni) mettono in luce come alla distribuzione di cimenti (che potremmo dire statici) di risultante \mathbf{R} e momento risultante \mathbf{M} sia sovrapposta un'altra distribuzione di cimenti, più propriamente dinamici, di cui il risultante $-\mathbf{R}^{(d)}$ e il momento risultante $-\mathbf{M}^{(d)}$ sono definiti da

$$(6) \quad \mathbf{R}^{(d)} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad \mathbf{M}^{(d)} = \frac{d\mathbf{K}}{dt},$$

cosicchè si ha

$$(5') \quad \begin{cases} \mathbf{R} = -\mathbf{R} + \mathbf{R}^{(d)}, \\ \mathbf{M} = -\mathbf{M} + \mathbf{M}^{(d)}. \end{cases}$$

Giova notare che tutto quanto si è detto sin qui vale per un sistema materiale qualsiasi, indipendentemente dalla ipotesi della rigidità. Ma se, come qui ammettiamo, si tratta di un solido, torna per lo più utile, per la determinazione effettiva dei caratteri globali della distribuzione dei cimenti, adottare un riferimento solidale del corpo (con l'origine nel baricentro o in un eventuale punto fisso del corpo). Esprendo, come già si è fatto ripetutamente, le derivate assolute di \mathbf{Q} e \mathbf{K} per mezzo delle derivate relative agli assi solidali prescelti, si dà alle (6) la forma

$$(6') \quad \mathbf{R}^{(d)} = \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{Q}, \quad \mathbf{M}^{(d)} = \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocità angolare del solido; dopo di che per avere in forma esplicita le componenti, secondo gli assi solidali, di $\mathbf{R}^{(d)}$ ed $\mathbf{M}^{(d)}$ non si ha che da tener conto delle formule generali (29'), (30') del n. 15 del Cap. IV, con quelle eventuali specificazioni, che sono suggerite dal caso che si considera.

A calcoli fatti, in quanto nelle (6') compaiono le $\dot{\mathbf{Q}}$, $\dot{\mathbf{K}}$, le componenti del risultante e del momento risultante dei ci-

menti dinamici si presentano espresse in termini delle caratteristiche u, v, w, p, q, r e delle loro derivate prime (nonchè, beninteso, delle costanti strutturali $m, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, x_0, y_0, z_0$). Ma, ove sia possibile, giova eliminare codeste derivate prime; e a ciò, in generale, si riesce in base alle equazioni differenziali del moto. In tal caso il risultante e il momento risultante dei cimenti si ottengono espressi per mezzo delle caratteristiche del moto rigido delle forze attive.

Un esempio semplice e particolarmente interessante dell'applicazione di questi criteri verrà sviluppato al prossimo § 3, nello studio della rotazione di un solido intorno ad un asse fisso.

§ 3. — Moto di un solido intorno ad un asse fisso.

Pendolo composto e sue applicazioni.

5. SOLIDO CON ASSE FISSO. — Consideriamo un solido S , vincolato a rotare senza attrito intorno ad un asse fisso e assoggettato ad una sollecitazione qualsiasi.

Qui le forze esterne si riducono a quelle direttamente applicate e alle reazioni che si destano lungo l'asse; e noi, mettendoci nelle condizioni che possono dirsi tipiche per problemi di moto, supponiamo che, mentre sono date le forze direttamente applicate, nulla si sappia a priori delle eventuali reazioni e si voglia determinare il moto del solido intorno all'asse. Poichè il sistema è ad un solo grado di libertà, basterà che ci procuriamo un'unica equazione indipendente dalle incognite reazioni.

Denotando con ξ l'asse (fisso) di rotazione del solido e assunto il centro O di riduzione in un punto (fisso) qualsiasi di ξ , avremo per il nostro solido le due equazioni vettoriali (1), (2'); e basta osservare che le eventuali reazioni, come forze applicate in punti dell'asse, hanno ciascuna momento nullo rispetto ad esso, per riconoscere che l'unica equazione, sufficiente a determinare il moto, si ottiene proiettando la seconda equazione cardinale (2') sull'asse ξ , cioè mettendo in equazione il teorema del momento scalare delle quantità di moto (V, n. 10). Si ottiene così, denotando oramai con M_ξ il mo-

mento risultante rispetto a ξ delle forze attive di natura esterna, l'equazione

$$(7) \quad \frac{dK_{\xi}}{dt} = M_{\xi},$$

ossia, introducendo l'anomalia θ che basta a determinare l'orientazione del solido intorno all'asse e indicando con \mathcal{A} il momento di inerzia del solido rispetto a ξ (IV, n. 20),

$$(7') \quad \mathcal{A} \ddot{\theta} = M_{\xi}.$$

Il momento assiale M_{ξ} , al pari delle forze direttamente applicate da cui esso proviene, si può ritenere conosciuto in funzione del tempo, nonchè delle posizioni e delle velocità simultanee dei punti del solido, vale a dire, in ultima analisi di t , θ e $\dot{\theta}$. Si riconosce così che la determinazione del moto è ridotta alla integrazione di un'equazione differenziale del second'ordine, perfettamente analoga a quella che regge il moto di un punto materiale, sollecitato, sopra una traiettoria conosciuta, da una forza totale di conosciuta componente tangenziale f (I, § 2)

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} | t).$$

Alla massa del punto qui fa riscontro il momento di inerzia \mathcal{A} , all'accelerazione tangenziale \ddot{s} l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ e, infine, alla risultante f delle forze tangenziali il momento risultante M_{ξ} delle forze attive rispetto all'asse.

Naturalmente nel caso particolarmente notevole di forze esclusivamente posizionali, il momento M_{ξ} dipende dalla sola θ (come la f dalla sola s) e la (7') risulta integrabile con due quadrature (I, nn. 12 e 15).

6. PENDOLO COMPOSTO. — Si designa con un tal nome ogni solido che, essendo liberamente girevole intorno ad un asse fisso, orizzontale, risulti soggetto esclusivamente al suo peso. Indicato ancora con ξ codesto asse di sospensione e chiamato G il baricentro del pendolo, individueremo, istante per istante, la posizione di quest'ultimo mediante l'anomalia θ (compresa tra $-\pi$ e π) del semipiano ξG , misurata a partire dal semipiano verticale uscente da ξ verso il basso, e riferita,

come a verso positivo, ad uno comunque scelto dei due versi possibili. Poichè i pesi dei singoli punti del solido sono, nel loro insieme, equivalenti vettorialmente al peso totale mg applicato in G , il momento M_{ξ} qui coincide col momento assiale di codesto peso totale. Ora se si riflette che la linea d'azione del peso totale è ortogonale all'asse (orizzontale) ξ , si riconosce che il valore assoluto di M_{ξ} è dato dal prodotto di mg per la minima distanza di codeste due rette, vale a dire per $|r \sin \theta|$, se r è la distanza (costante) del baricentro G dall'asse ξ . Se poi si tien conto che in ogni caso il peso tende a ricondurre il baricentro nel semipiano verticale verso il basso (da cui si contano le anomalie) e quindi dà luogo ad un momento di richiamo, appare manifesto che M_{ξ} deve essere sempre di segno contrario a θ e quindi a $\sin \theta$, talchè si ha, in valore e segno,

$$M_{\xi} = -mgr \sin \theta.$$

Di qui, applicando la (7') del n. prec., si conclude che l'equazione del moto del pendolo composto è data da

$$(8) \quad \mathcal{A} \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta.$$

Ora basta porre

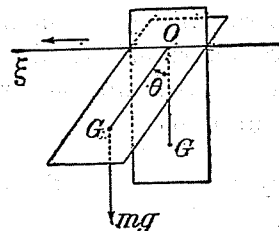
$$(9) \quad \frac{\mathcal{A}}{mr} = l$$

per ridurre la (8) alla forma

$$(8') \quad l \ddot{\theta} = -g \sin \theta,$$

in cui si riconosce l'equazione, che regge il moto di un pendolo semplice di lunghezza l (I, n. 34).

Coincidendo le equazioni differenziali, coincideranno altresì gli integrali (beninteso, a partire da condizioni iniziali identiche), onde abbiamo che: *Un pendolo composto si muove come un pendolo semplice di lunghezza \mathcal{A}/mr .*



Del resto, anche senza richiami del Cap. I, questo risultato si può verificare direttamente, in base alla osservazione che il pendolo semplice non è che un caso limite del solido pesante girevole intorno ad un asse orizzontale. Basta applicare le stesse considerazioni or ora svolte, immaginando un pendolo così costituito: massa pendolare assimilabile ad un punto materiale P di massa m , congiunto all'asse orizzontale fisso ξ mediante un'asticella rigida, di lunghezza l e peso trascurabile, perpendicolare all'asse ξ e liberamente girevole intorno ad esso. Si ha in tal caso $\mathcal{A} = ml^2$, $r = l$, onde la equazione (8) del moto assume senz'altro la forma (8'); e dal confronto delle (8'), (8) segue l'enunciato.

Alla lunghezza l definita dalla (9) si dà il nome di *lunghezza ridotta del pendolo composto*.

E, per quanto si è or ora visto, possiamo anche dire che, se si indica con O la proiezione del baricentro G sull'asse ξ e si porta sulla semiretta OG il segmento $OP = l$, il punto P , considerato come solidale col pendolo composto, oscilla come se non appartenesse a questo corpo, ma costituisse la massa pendolare, liberamente oscillante e di misura m , di un pendolo semplice sospeso in O .

I due punti O e P chiamansi rispettivamente *centro di sospensione* e *centro di oscillazione* del pendolo composto, e la parallela o per P a ξ , i cui punti oscillano tutti come P , dicesi *asse di oscillazione*.

Notiamo che la (9) si può scrivere $OP \cdot OG = \mathcal{A}/m$.

Se poi si introducono il momento d'inerzia \mathcal{A}_0 del solido rispetto all'asse baricentrale parallelo a ξ e il corrispondente giratore δ , si ha, come ben sappiamo (X, n. 21),

$$(9') \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + mr^2 = m(\delta^2 + r^2),$$

talchè, sostituendo nella (9), si ottiene

$$l = \frac{\delta^2}{r} + r,$$

e quindi

$$(9'') \quad (l - r)r = \delta^2,$$

od anche

$$OG \cdot OP = \delta^2.$$

È questa, nella sua forma più semplice, la relazione caratteristica, che lega la lunghezza ridotta alla distanza del baricentro dall'asse di oscillazione e al giratore baricentrale del solido.

Poichè r e δ^2 sono positivi, si desume dalla (9'') che è sempre $l > r$; cioè l'asse di oscillazione dista sempre dall'asse di sospensione più del baricentro.

7. TEOREMA DELL'HUYGENS. — Supponiamo che il pendolo presenti tale disposizione sperimentale che sia possibile sospenderlo anche per l'asse di oscillazione o . Diciamo che la lunghezza ridotta è ancora l ; cioè, quando l'asse di oscillazione diviene asse di sospensione, il primitivo asse di sospensione diviene asse di oscillazione.

Per dimostrare questa proprietà applichiamo la (9'') del n. prec. al calcolo della lunghezza ridotta l' del dato pendolo, nella seconda disposizione. Dovremo sostituirvi l' ed $l - r$ ad l ed r rispettivamente, lasciando inalterato δ . Avremo così

$$(l' - l + r)(l - r) = \delta^2,$$

e quindi, eliminando δ^2 per mezzo della (9'') e riducendo,

$$(l' - l)(l - r) = 0.$$

Di qui, essendo $l > r$, si trae appunto

$$l' = l,$$

come avevamo asserito.

Reciprocamente, se un pendolo oscilla nello stesso modo intorno a due assi paralleli (situati in un medesimo piano, da bande opposte e a diversa distanza dal centro di gravità) cioè se le lunghezze ridotte l ed l' coincidono, il loro valore comune è precisamente eguale alla distanza dei due assi (Teorema dell'HUYGENS).

Infatti, designate con r , r' le distanze dei due assi dal baricentro, si ha per la (9'')

$$(l - r)r = \delta^2, \quad (l' - r')r' = \delta^2$$

onde segue, per la supposta eguaglianza di l ed l' ,

$$(l - r)r = (l - r')r',$$

ossia

$$l(r - r') = r^2 - r'^2.$$

Essendo, per ipotesi, diverse le distanze r ed r' dei due assi dal centro di gravità, potremo dividere per $r - r'$ e risulterà $l = r + r'$, secondo quanto si è affermato.

8. DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DI g . — Sul teorema dell'HUYGENS si basa l'impiego del pendolo fisico per la determinazione sperimentale dell'accelerazione di gravità. Si adopera il cosiddetto *pendolo reversibile del KATER*. Esso è un pendolo composto, cui sono uniti due assi paralleli (coltelli) contenenti nel loro piano e a distanze diseguali il baricentro del pendolo, e tali di più che il pendolo possa farsi oscillare intorno ad entrambi, nel medesimo modo. Per il teorema precedente, la distanza l dei due assi è senz'altro eguale alla lunghezza del pendolo semplice isocrono, talchè la durata T di una oscillazione semplice, per piccole ampiezze, sarà espressa sensibilmente (I, n. 39) da

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Poichè l e T si misurano sperimentalmente in modo agevole (l col catetometro, T notando il tempo di durata di un numero abbastanza grande di oscillazioni) la formula precedente serve alla determinazione di g .

9. DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI MOMENTI DI INERZIA. — Una seconda applicazione del teorema dell'HUYGENS consiste nella determinazione pratica dei momenti di inerzia dei corpi solidi.

Ove si voglia valutare il momento di inerzia di un corpo, rispetto a un dato asse ξ , basta che lo si possa far oscillare attorno a quest'asse.

Designando con m' la massa del corpo, con r' la distanza del suo baricentro G' dall'asse, con \mathcal{A} il cercato momento di inerzia, con T' la durata di una oscillazione semplice, si ha

$$T' = \pi \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{m' r' g}},$$

da cui si potrebbe ricavare il valore di \mathcal{A} qualora, oltre a T' , si conoscessero m' ed r' .

Ma sperimentalmente è malagevole determinare con esattezza il valore di r' .

Giova quindi ricorrere al seguente artificio, che permette di prescindere anche dalla conoscenza di m' .

Si colleghi rigidamente al corpo dato una massa ausiliaria m'' , distribuita uniformemente attorno all'asse ξ , e si faccia oscillare questo sistema complesso. Sia T la durata di oscillazione di questo sistema e μ il momento di inerzia rispetto a ξ del corpo ausiliario. L'incognita \mathcal{A} si può esprimere per mezzo di T' , T e μ .

Infatti, introducendo per un momento anche la distanza r del baricentro G dell'intero sistema dall'asse ξ , si avrà una formula analoga alla (4), cioè

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \mu}{(m' + m'')rg}}.$$

Ora il centro di gravità G'' della massa m'' , per la supposta simmetria, cade sopra la retta ξ ; d'altra parte (X_1 , nn. 12 e 10), applicando la proprietà distributiva, e poi la regola dei momenti ai punti G' (di massa m') e G'' (di massa m''), nonchè al loro baricentro G , si ricava immediatamente

$$m' r' = (m' + m'') r.$$

Portando questo valore di $(m' + m'') r$ nella espressione di T , dividendola membro a membro per la formula che dà T' ed elevando a quadrato, si deduce

$$\mathcal{A} = \frac{\mu T^2}{T'^2 - T^2}.$$

Tenendo conto di ciò (nonchè di $\delta^2/r^2 \leq 1$), si verifichi che la precedente espressione di X/Y , considerata come funzione di α , ha derivata sempre negativa nell'intervallo $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Per conseguenza il detto rapporto X/Y , che si annulla nell'intervallo (per $3 \cos \alpha = 2 \cos \alpha_0$), prende i massimi valori assoluti in corrispondenza ai due estremi α_0 e $\pi/2$.

Si completi la discussione, constatando che la limitazione già incontrata,

$$\cos \alpha_0 \leq \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r^2} f,$$

è in definitiva non soltanto necessaria, ma anche sufficiente

23. Moto incipiente di una trave pesante, appoggiata su di un piano orizzontale scabro e sollecitata ad un estremo. Cfr. G. BISCONCINI, Boll. della Unione mat. ital., Anno IV, 1925, nn. 3-4, pagg. 109-113.

24. Studio dinamico delle oscillazioni di un albero orizzontale rotante sui suoi cuscinetti.

Il caso della rotazione di regime fu considerato come un problema di equilibrio relativo al § 3 del Cap. XVI del vol. I. Per la trattazione dinamica, cfr. O. MULLI, Nuovo Cimento, vol. XXV, 1923, pagg. 77-85.

CAPITOLO VIII.

DINAMICA DEI SOLIDI.

MOTI INTORNO AD UN PUNTO FISSO.

FENOMENI GIROSCOPICI.

§ 1. — Generalità sul moto di un solido intorno ad un punto fisso o intorno al baricentro.

1. EQUAZIONI DI EULERO. — Nella Dinamica dei sistemi rigidi un problema tipico con tre gradi di libertà è, accanto al moto piano, quello del moto di un solido fissato (senza attrito) in un suo punto O ; ed è questo uno dei problemi più importanti di tutta la Meccanica, non soltanto per la grande varietà di questioni concrete, di cui esso fornisce la schematizzazione, ma anche per le vedute generali e gli sviluppi teorici, che ne derivarono.

Della impostazione di un tale problema avemmo già incidentalmente occasione di dare un cenno al n. 2 del Cap. precedente. Riprendiamo le considerazioni là accennate per chiarirle e completarle.

Naturalmente, trattandosi del moto di un solido, conviene ricorrere alle equazioni cardinali; e l'ipotesi stessa della fissità del punto O suggerisce senz'altro di scegliere in esso il centro di riduzione dei momenti, con che codeste equazioni, riferite ad assi galileiani $\Omega\xi\eta\zeta$, assumono la loro forma più semplice

$$(1) \quad \frac{dQ}{dt} = R,$$

$$(2) \quad \frac{dK}{dt} = M.$$

Qui le forze esterne, di cui R ed M denotano il risultante e il momento risultante, rispetto al punto fisso O , constano di quelle *direttamente applicate* (di natura esterna) e della *reazione* che si desta in O .

Ora mettendoci, come già pel solido ad asse fisso (VII, n. 5), nelle condizioni tipiche, supponiamo che, conoscendo le forze attive (e bastano quelle esterne) e nulla sapendo a priori della reazione in O , si voglia determinare il moto del solido intorno al punto fisso.

Codesta incognita reazione compare esplicitamente nella (1), come componente della R , mentre, essendo in ogni caso applicata in O , non reca contributo alcuno al momento M , talchè la (2) risulta da essa del tutto indipendente; e, poichè il solido ha, in questo caso, tre soli gradi di libertà, l'equazione vettoriale (2) basta da sola (come già notammo al cit. n. 2 del Cap. prec.) a caratterizzare il moto del solido in base ai dati diretti della questione (e alle condizioni iniziali).

Codesta equazione cardinale dei momenti si rende più espressiva e più adatta alla discussione del problema, ove si riferisca ad una terna di assi x, y, z , solidali col corpo e aventi l'origine in O , con che essa assume notoriamente la forma

$$(3) \quad \dot{K} + \omega \wedge K = M,$$

dove ω designa la velocità angolare della terna solidale, cioè del corpo stesso, rispetto agli assi $\Omega\xi\eta\zeta$ e \dot{K} la derivata di K rispetto a t con referenza alla terna $Oxyz$.

Anzi giova particolarizzare ulteriormente il riferimento solidale, assumendo come terna $Oxyz$ quella dei tre assi principali di inerzia del solido nel suo punto O . Con questo riferimento l'omografia vettoriale di inerzia dà per le componenti del momento delle quantità di moto K , secondo gli assi x, y, z , le espressioni canoniche (IV, nn. 16, 19)

$$(4) \quad K_x = \mathcal{A}p, \quad K_y = \mathcal{B}q, \quad K_z = \mathcal{C}r,$$

dove $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ denotano i tre momenti principali di inerzia del solido in O (i quali, naturalmente, si intendono dati) e p, q, r le incognite componenti, secondo $Oxyz$, della velocità angolare ω di quest'ultima terna (cioè del solido stesso) rispetto alla terna di riferimento meccanico $\Omega\xi\eta\zeta$.

Se, allora, si designano con M_x, M_y, M_z le componenti

secondo gli assi solidali, del momento risultante M , rispetto ad O , delle forze attive esterne, la (3), proiettata sui tre assi (principali d'inerzia) x, y, z , conduce alle tre equazioni scalari

$$(5) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C})qr = M_x, \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp = M_y, \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pq = M_z. \end{cases}$$

Queste equazioni, di cui già incontrammo un caso particolare al n. 13 del Cap. prec., costituiscono, nella loro forma generale, le classiche *equazioni di EULERO* pel moto di un solido intorno ad un suo punto.

Ma importa rilevare che, in generale, non si può dire raggiunta con esse la impostazione completa e definitiva del problema. Le componenti M_x, M_y, M_z del momento M , come le forze attive esterne da cui questo proviene, vanno considerate, nel caso più generale, come conosciute in funzione, oltre che del tempo, delle *velocità* dei singoli punti del solido, e, in più, delle loro posizioni nello spazio o, ciò che è lo stesso data l'ipotesi di rigidità, della *orientazione* del solido intorno ad O . Ora noi sappiamo che mentre codeste velocità sono esprimibili, a norma della nota formula cinematica (III., n. 6)

$$v_P = \omega \wedge (P - O),$$

in termini finiti delle p, q, r e della posizione dei rispettivi punti o, ciò che è lo stesso, di tre parametri d'orientazione, comunque scelti, del solido nello spazio, le p, q, r , per la loro stessa natura di velocità, sono legate a codesti parametri di orientazione da relazioni di tipo differenziale. Appare di qui manifesto che a completare l'impostazione del nostro problema dobbiamo anzitutto fissare codesti parametri di orientazione e poi aggregare alle equazioni di EULERO (5) le loro relazioni differenziali con le caratteristiche p, q, r .

Scelti, ad es., come parametri gli angoli di EULERO θ, φ, ψ della terna solidale $Oxyz$ rispetto ad $\Omega\xi\eta\zeta$, aggiungeremo alle (5) le note equazioni, puramente cinematiche (III., nn. 26-28),

$$(6) \quad \begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}; \end{cases}$$

con che, in quanto le M_x, M_y, M_z nelle (5) vanno oramai considerate note in termini finiti di $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ e t , si ottiene un sistema differenziale del primo ordine (manifestamente riducibile a forma normale) fra le sei funzioni incognite $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ del tempo. Naturalmente, eliminando le p, q, r , possiamo ridurlo ad un sistema equivalente del secondo ordine nelle sole incognite θ, φ, ψ ; e, nell'uno e nell'altro caso, l'integrale generale dipende da sei costanti arbitrarie, di cui si può disporre per fissare ad arbitrio pel solido la orientazione e la velocità angolare iniziali.

Null'altro si può aggiungere in ordine a codesta determinazione del moto, finchè non si introduca qualche ipotesi restrittiva per la natura della sollecitazione o della struttura materiale del corpo, di che daremo vari esempi nei prossimi §§.

Qui, in via generale, va notato che, ogniqualvolta siasi determinato il moto del solido, la prima equazione cardinale (1) definisce univocamente, in funzione del tempo, la reazione del punto fisso O , analogamente a quanto si è verificato nel corrispondente caso statico (XIII, n. 5).

2. MOTO DI UN SOLIDO LIBERO INTORNO AL BARICENTRO.

— Secondo quanto si è visto al n. 2 del Cap. prec., la seconda equazione cardinale assume la forma

$$(3) \quad \dot{K} + \omega \wedge K = M$$

anche per un *solido libero*, purchè si prenda come centro di riduzione (e origine della terna solidale) il baricentro del corpo. Qui naturalmente non vi è luogo a parlare di reazione in $O \equiv G$, talchè M designa ancora il momento risultante delle sole forze esterne attive (questa volta rispetto al baricentro) e la (3), proiettata sugli assi principali baricentrali del solido, fornisce tre relazioni differenziali fra le caratteristiche p, q, r (del moto relativo al baricentro) e i momenti M_x, M_y, M_z , le quali formalmente hanno ancora l'aspetto delle equazioni di EULERO (5). Ma qui interviene, rispetto al caso del n. prec., una differenza essenziale. Introdotti i parametri di orientamento del solido, p. es. gli angoli di EULERO della terna baricentrale $Gxyz$ rispetto alla terna di riferimento meccanico $\Omega\xi\eta\zeta$, il momento M , al pari della sollecitazione attiva, va considerato

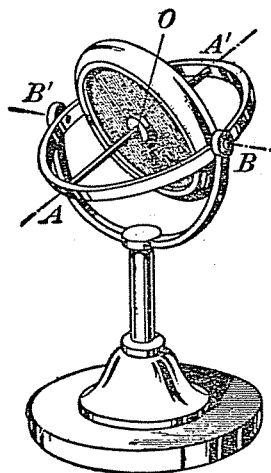
dipendente non solo dagli argomenti $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ (e t), tutti inerenti al moto relativo al baricentro, ma anche dalla posizione e dalla velocità (assolute) del baricentro stesso; e poichè il moto di questo è definito precisamente dalla prima equazione cardinale (si ricordi il teorema del moto del baricentro, Cap. V, n. 6) si riconosce che per la determinazione del moto di un solido libero intorno al baricentro non basta considerare isolatamente, come pel moto intorno ad un punto fisso, la equazione cardinale dei momenti, bensì è necessario (almeno in generale) tornare alla impostazione tipica del problema dinamico del solido, considerando simultaneamente le due equazioni cardinali.

§ 2. — Solidi in rapida rotazione e fenomeni giroscopici elementari.

3. FENOMENI GIROSCOPICI ELEMENTARI. — È qui opportuno che, in una breve digressione, ricordiamo e precisiamo un ordine di fenomeni meccanici, che, almeno sotto il loro aspetto immediato, non possono essere sfuggiti alla osservazione di alcuno. Ciascuno di noi ha certamente sperimentato che i solidi in rapida rotazione presentano, di fronte alla gravità, un comportamento, per così dire, di eccezione: un disco che rotoli rapidamente sul terreno, le ruote di una bicicletta in corsa, una trottola che giri velocemente intorno al proprio asse mostrano che la rapida rotazione sottrae, almeno in parte, questi vari corpi agli ordinari effetti della gravità. Ora grossolanamente parlando, si può dire che son questi alcuni esempi di quei fenomeni che si sogliono chiamare *giroscopici*.

Col nome di *giroscopio* (che sembra essere stato usato la prima volta dal FOUCAULT per un dispositivo ideato dal BOHNENBERGER, a Tübingen, nel 1877) si designa in Fisica un apparecchio che, nella sua forma più semplice, è costituito da un disco metallico, omogeneo, massiccio, calettato ortogonalmente, nel suo centro O , ad un asse, i cui estremi sono liberamente impernati in due punti A, A' diametralmente opposti di un anello metallico, il quale è, alla sua volta, liberamente girevole intorno al suo diametro ortogonale ad AA'

in quanto gli estremi B, B' di questo secondo diametro sono imperniati in una forcilla semicircolare; e questa forcilla è resa, pur essa, girevole liberamente intorno al suo asse dall'inserzione a manicotto del suo piede in una solida base, destinata ad essere appoggiata su di un tavolo orizzontale. Secondo la nomenclatura da noi adottata (IV, n. 17) il disco massiccio insieme col suo asse solidale AA' (in quanto è un solido rotondo dotato, rispetto ad AA' , di completa simmetria geometrica e materiale) costituisce un giroscopio in senso ristretto; e possiamo dire che il dispositivo dianzi descritto è semplicemente destinato a far sì che codesto giroscopio possa liberamente muoversi intorno al



suo baricentro O .

Ciò posto, si immagini di imprimere al giroscopio una rapidissima rotazione intorno al suo asse AA' e di appoggiare l'apparecchio su di un tavolo, con che codesto asse AA' si troverà disposto secondo una certa direzione. Se allora si prova a deviare l'asse AA' da codesta direzione, facendo rotare con la mano l'anello intorno al suo diametro BB' o la forcilla intorno al suo asse verticale, si avverte subito una resistenza notevolmente maggiore di quella che sarebbe offerta dal semplice attrito ai perni e nel manicotto della base, qualora il giroscopio fosse in quiete (relativa). Se poi si prende in mano la base dell'apparecchio e lo si muove comunque nello spazio (naturalmente con una certa lentezza ed evitando mosse brusche) si vede che l'asse AA' del giroscopio, in rapida rotazione, conserva invariata la direzione primitiva, rispetto agli oggetti circostanti. Anzi se si ricorre a dispositivi atti ad assicurare, meglio della forcilla e del manicotto, la libera mobilità del giroscopio intorno al suo baricentro, e se ne mantiene, p. es. con mezzi elettrici, la rapida rotazione, si verifica che nemmeno la rotazione diurna della Terra modifica la direzione dell'asse AA' , in quanto questo si conserva invariabilmente diretto verso il medesimo punto della sfera celeste.

Questa constatazione sperimentale prende il nome di *principio della permanenza o tenacia degli assi giroscopici*.

Ma vi è un'altro fenomeno, altrettanto importante e un po' più riposto. Naturalmente applicando all'asse in un suo generico punto una forza F , p. es. un peso, si riesce, per così dire, a vincerne la tenacia e a farlo deviare; ma questa deviazione non avviene come potrebbe apparire prevedibile alla semplice intuizione, cioè nel piano per l'asse che contiene la forza, bensì in quello ortogonale ad essa. L'osservazione accurata conduce a precisare il fenomeno nei termini seguenti. La forza F applicata in un generico punto dell'asse, p. es. in A , determina rispetto al baricentro O un certo momento M , che risulta ortogonale (in verso ben determinato) al piano di F e dell'asse. Ora, sotto l'azione di F , l'asse giroscopico (pensato al solito nel verso rispetto a cui appare sinistrorsa la presupposta rotazione rapida del giroscopio) tende a disporsi nella direzione e nel verso di M . È questo il cosiddetto *principio della tendenza al parallelismo* (dell'asse giroscopico al momento sollecitante).

Noi qui, in base alla equazione cardinale dei momenti, ci renderemo conto in via teorica dei due principi sperimentali ora chiariti; ed anzi, attenendoci ad una trattazione di G. BISCONCINI⁽¹⁾, faremo vedere che per spiegare tali fenomeni non è affatto essenziale l'ipotesi che si tratti di un solido a struttura giroscopica, bensì basta supporre, che l'asse intorno a cui avviene la rapida rotazione coincida con un asse principale d'inerzia del solido.

4. ROTAZIONI SPONTANEE. — Fissiamo l'attenzione sul moto di rotazione di un solido S intorno a un suo punto O , fisso o coincidente col baricentro; e consideriamo dapprima un caso particolare molto importante, la cui teoria generale sarà svolta nel paragrafo prossimo. Il caso, cui alludiamo, è quello dei cosiddetti *moti spontanei o per inerzia*, caratterizzati dalla circostanza che sia costantemente nullo il momento risultante M delle forze direttamente applicate (di

⁽¹⁾ Sui cosiddetti fenomeni giroscopici, Rend. Acc. Lincei, serie 6^a, vol. XXII (1935), pp. 417-420.

Per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che, in quanto il momento $M = (A - O) \wedge F$ è tutto equatoriale, si ha $M_z = 0$; onde la terza equazione di EULERO (5), ove si tenga conto della condizione caratteristica $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ della struttura giroscopica, si riduce ad

$$\dot{r} = 0.$$

Si ha dunque intanto che, durante il moto la velocità angolare del corpo intorno ad Oz conserva costantemente il suo valore iniziale r_0 .

D'altra parte, posto $OA = l$, si derivi l'identità

$$A - O = lk$$

rispetto al tempo, con riferimento ad assi fissi, se O è punto fisso, ad assi di direzione invariabile e di origine O , se questo punto coincide col baricentro. Una prima derivazione dà

$$(7) \quad \frac{dA}{dt} = l \frac{dk}{dt}.$$

Ma, in virtù della formula del POISSON (III, n. 15)

$$\frac{dk}{dt} = \omega \wedge k$$

e della espressione

$$\omega = e + rk,$$

che, ove si denoti con e il componente equatoriale di ω , compete a questa velocità angolare per i solidi a struttura giroscopica (IV, n. 17), si ha

$$(8) \quad \frac{dk}{dt} = e \wedge k;$$

talchè la (7) si può anche scrivere

$$(9) \quad \frac{dA}{dt} = le \wedge k;$$

e di qui intanto si rileva che nell'istante iniziale, in cui per ipotesi è nullo il componente e della velocità angolare ω (tutta assiale), è pur nulla la velocità di A .

Poichè inizialmente e è nullo e d'altro canto sussiste la (9), si ha, sempre inizialmente,

$$(10) \quad \left(\frac{d^2 A}{dt^2} \right)_0 = l \left(\frac{de}{dt} \wedge k \right)_0.$$

Ma, in forza della stessa (9) e della $K = \mathcal{A}e + \mathcal{C}r_0 k$, (IV, n. 17) la equazione cardinale dei momenti dà

$$\mathcal{A} \frac{de}{dt} + \mathcal{C}r_0 e \wedge k = M,$$

e quindi inizialmente

$$\left(\frac{de}{dt} \right)_0 = \frac{1}{\mathcal{A}} (M)_0;$$

dopo di che, sostituendo nella (10) e osservando che dalla

$$M = l k \wedge F$$

discende, per la definizione stessa di prodotto esterno (I, n. 21),

$$lF = M \wedge k,$$

si perviene alla

$$\left(\frac{d^2 A}{dt^2} \right)_0 = \frac{l^2}{\mathcal{A}} (F)_0,$$

la quale esprime appunto che il moto incipiente di A avviene nella direzione e nel verso della forza attiva F (*).

Osserviamo che l'ipotesi, cui ci siamo attenuti in questa seconda dimostrazione, che la forza attiva sia perpendicolare all'asse, è del tutto inessenziale, perchè ogni forza applicata nel generico punto A dell'asse si può scindere nel suo componente assiale F_a e nel suo componente equatoriale F ; e, siccome F_a non reca contributo alcuno al momento M , tutto va come se la forza si riducesse al suo componente equatoriale.

9. EQUAZIONI DI EULERO PER UN SOLIDO A STRUTTURA GIROSCOPICA. — Nelle considerazioni dei prec. nn. 5 e 6 sul moto di un solido a struttura giroscopica si è sopra tutto utiliz-

(*) Il prof. BISCONCINI ha mostrato che si può arrivare a questa conclusione in modo concettualmente più diretto, evitando passaggi formali. Cfr. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, s. 6^a, vol. XXVIII, 1938.

zata la decomposizione della velocità angolare ω e del momento risultante K delle quantità di moto nei loro componenti equatoriali ed assiali (IV, n. 17)

$$(11) \quad \omega = e + rk, \quad K = Ae + Crk.$$

Qui, in vista di future applicazioni, giova fissare l'attenzione sulla forma (del resto già incidentalmente accennata al n. prec.), che si può dare in questo caso alle equazioni di EULERO (5), isolando la terza e condensando le altre due in un'unica equazione vettoriale, relativa al piano equatoriale, in guisa da mettere distintamente in evidenza i modi di variare di r e di e .

La terza delle (5), essendo qui per ipotesi $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, si riduce a

$$(12) \quad Cr = M_z;$$

mentre le altre due, ove si denoti con M_1 il componente equatoriale del momento risultante delle forze esterne rispetto ad O , si possono manifestamente compendiare nell'unica equazione vettoriale

$$(13) \quad Ae - (C - \mathcal{A})rk \wedge e = M_1.$$

Nel seguito, per intenderci, designeremo queste due equazioni col nome di *equazioni di EULERO pei solidi a struttura giroscopica*.

Naturalmente ad esse si può pervenire, anche senza passare traverso le equazioni (generali) di EULERO, ricavandole direttamente dalla equazione cardinale dei momenti in base alla ipotesi $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, caratteristica della struttura giroscopica; e non sarà inutile accennare qui una tale deduzione.

Per la derivata temporale di K , rispetto agli assi di riferimento meccanico, si ha, in virtù della seconda delle (11) e della (8), l'espressione

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{A} \frac{de}{dt} + Cre \wedge k + Crk,$$

dove appare senz'altro manifesto che a secondo membro il terzo addendo è assiale e il secondo è equatoriale. Ma anche il primo addendo, cioè in sostanza de/dt , è equatoriale, perchè,

trattandosi di una derivata vettoriale da eseguirsi rispetto agli assi di riferimento meccanico, si ha

$$\frac{de}{dt} = \dot{e} + \omega \wedge e,$$

ossia, per la prima delle (11),

$$(14) \quad \frac{de}{dt} = \dot{e} + rk \wedge e;$$

e qui l'ortogonalità a k risulta senz'altro manifesta, in quanto \dot{e} è la derivata di un vettore equatoriale e , da eseguirsi rispetto ad assi solidali col piano equatoriale.

Ciò premesso, identificando nei due membri della seconda equazione cardinale i componenti assiali, si ottiene la (12), mentre identificando i componenti equatoriali si perviene alla

$$(15) \quad \mathcal{A} \frac{de}{dt} + Cre \wedge k = M_1,$$

che, in virtù della (14), coincide appunto colla (13).

§ 3. — Moto alla Poinot.

10. EQUAZIONI DEL MOTO. — Nel seguito di questo Capitolo ci proponiamo di applicare le generalità svolte nei due prec. §§ allo studio approfondito di alcuni problemi particolari, corrispondenti ad ipotesi semplici e fisicamente espresse circa la natura della sollecitazione o la struttura materiale del solido fissato in un suo punto O . Ed in primo luogo, riferendoci ad un solido di struttura materiale qualsiasi, discuteremo i moti che si presentano, quando le forze attive (di natura esterna), applicate al solido, hanno, rispetto al punto fisso O , un momento risultante costantemente nullo (cioè sono vettorialmente equivalenti ad un'unica forza applicata in O). Questa circostanza si trova manifestamente realizzata per ogni solido soggetto all'azione esclusiva della gravità e fissato nel suo baricentro, e, più particolarmente ancora, per qualsiasi solido fissato in un suo punto e sottratto ad ogni sollecitazione attiva, a partire da un atto di moto iniziale qualsivoglia.

In ogni caso, sotto la posta ipotesi, le forze di natura esterna comprendono, oltre quelle attive, soltanto la reazione del punto fisso, la quale ha pur essa momento nullo rispetto ad O . Perciò la seconda equazione cardinale (2) assume, rispetto agli assi fissi $O\xi\eta\zeta$, la forma

$$(15) \quad \frac{dK}{dt} = 0;$$

cosicchè esprime il fatto che, durante tutto il moto, il momento delle quantità di moto K del solido, rispetto al suo punto fisso O , si mantiene costante (in grandezza, direzione e verso). Vale insomma l'integrale del momento (vettoriale) delle quantità di moto

$$(16) \quad K = K_0,$$

dove K_0 denota il momento risultante delle quantità di moto iniziali.

Vi è un caso particolare, in cui questo integrale primo basta da solo a caratterizzare completamente il moto: è il caso in cui l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso O si riduce ad una sfera ($\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$), con che le equazioni canoniche (4) dell'omografia d'inerzia equivalgono all'unica equazione vettoriale

$$K = \mathcal{A}\omega.$$

La costanza di K implica perciò quella di ω , cosicchè il moto si riduce necessariamente ad una rotazione uniforme (intorno ad una retta per O comunque diretta, sia nello spazio che nel corpo).

Quando l'ellissoide d'inerzia non si riduce ad una sfera, la costanza di K rispetto al riferimento fisso non implica che questo vettore serbi una determinazione invariata entro il corpo o, più precisamente, rispetto ad assi solidali con esso, che al solito sceglieremo con l'origine in O . La legge con cui varia entro il corpo il vettore K (in quanto K è fisso nello spazio) è definita dalla

$$(15') \quad \dot{K} + \omega \wedge K = 0,$$

in cui si traduce, con codesto riferimento, la (15).

Se, al solito, si assume la terna solidale $Oxyz$, coincidente con quella degli assi principali d'inerzia in O , la (15') proiettata su questi assi, dà le tre equazioni di EULERO, a secondi membri identicamente nulli;

$$(5') \quad \begin{cases} \mathcal{A}\dot{p} - (\mathcal{B} - \mathcal{C})qr = 0, \\ \mathcal{B}\dot{q} - (\mathcal{C} - \mathcal{A})rp = 0, \\ \mathcal{C}\dot{r} - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pq = 0, \end{cases}$$

le quali, a differenza di quanto accade in condizioni generali di sollecitazione (n. 1), implicano esclusivamente le p, q, r e le loro derivate, cosicchè bastano da sole a definire la legge temporale di variazione di codeste caratteristiche, vale a dire, in sostanza, l'andamento del moto. Su questo le forze attive, che non compaiono affatto nelle (5'), non influiscono in alcun modo; e si può dire che tutta la loro azione si esplica nel determinare, a norma della prima equazione cardinale, la reazione del punto fisso, mentre il solido si muove intorno a questo come se fosse sottratto ad ogni forza attiva esterna e risentisse solo gli effetti dell'atto di moto iniziale. È per questo che il moto qui considerato vien detto da taluni *moto per inerzia* o *moto spontaneo*. Noi lo chiameremo *moto alla POINROT* dal nome di chi ne ha dato la rappresentazione geometrica di cui ci occuperemo al n. 13.

11. INTEGRALI PRIMI. — Abbiamo visto al n. prec. che, nel presente caso del moto alla POINROT, la seconda equazione cardinale (1), o le equivalenti equazioni di EULERO (5') ammettono l'integrale del momento (vettoriale) delle quantità di moto

$$(16) \quad K = K_0.$$

Di qui consegue in particolare che durante il moto alla POINROT resta invariata la lunghezza del momento K , il che, in base alle (4) del n. 1, si traduce nella equazione

$$(17) \quad \mathcal{A}^2 p^2 + \mathcal{B}^2 q^2 + \mathcal{C}^2 r^2 = K_0^2.$$

È questo per le (5') il cosiddetto *integrale del momento scalare delle quantità di moto*.

Ma è facile riconoscere che per codeste equazioni sussiste un altro integrale primo fondamentale. Si osservi, infatti, che trattandosi di un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, sussiste il teorema delle forze vive (V. n. 30)

$$dT = dL,$$

dove dL denota il lavoro elementare delle forze esterne; e che d'altra parte questo lavoro elementare, che per ogni solido fissato in un punto è dato (IV, n. 3) da $\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} dt$, è qui costantemente nullo, insieme col momento \mathbf{M} delle forze esterne. Perciò il teorema delle forze vive assume la forma $dT = 0$, onde si desume per integrazione

$$(18) \quad T = \text{cost.} = E.$$

È questo l'integrale delle forze vive; e, ricordando la nota espressione della forza viva di un solido fissato in un punto (IV, n. 10)

$$T = \frac{1}{2} K \times \boldsymbol{\omega},$$

si può dargli, in base alle (4), la forma esplicita

$$(18') \quad \mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2 + \mathcal{C}r^2 = 2E.$$

Giova notare che la E (valore costante della energia cinetica) si può anche interpretare come il *valore costante dell'energia totale*, perchè non vi può essere variazione dell'altra specie di energia (energia potenziale) quando, come qui accade, il lavoro elementare è costantemente nullo.

12. SULLA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO ALLA POINSON. — Si è visto al n. prec. che per le equazioni (5') sussistono quattro integrali primi scalari, quello delle forze vive e i tre che si ottengono proiettando sugli assi fissi l'integrale (16) del momento delle quantità di moto. Ciò, in base ad un teorema del LIOUVILLE che ci riserbiamo di stabilire al § 7 del Cap. X, permette senz'altro di concludere che le equazioni (5') del moto alla POINSON sono integrabili per quadrature.

Noi qui non ci indugeremo su questa integrazione, limitandoci ad affermare che le quadrature, cui si è così condotti sono di tipo ellittico.

Piuttosto mostreremo come, determinate in funzione del tempo le caratteristiche p, q, r , bastino, in questo caso, alcune ovvie eliminazioni ed una ulteriore quadratura per ottenere le espressioni, in termini di t , dei tre angoli di EULERO della terna $Oxyz$ rispetto alla terna $O\xi\eta\zeta$, mentre, in generale, occorre a tale scopo la integrazione (non effettuabile per quadrature) di un'equazione del RICCATTI (IV, § 8).

Per dimostrare l'asserto, conviene utilizzare l'integrale (16), cioè tener conto della invariabilità del momento \mathbf{K} rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$. Assunto l'asse fisso ζ nella direzione e nel verso di codesto momento e denotati con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori di ζ rispetto alla terna principale di inerzia si possono scrivere le (4) sotto la forma

$$K\gamma_1 = \mathcal{A}p, \quad K\gamma_2 = \mathcal{B}q, \quad K\gamma_3 = \mathcal{C}r,$$

talchè, tenendo conto delle note relazioni (III, n. 26)

$$(19) \quad \gamma_1 = \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma_2 = \cos \varphi \sin \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

si ottengono le

$$(4') \quad K \sin \varphi \sin \theta = \mathcal{A}p, \quad K \cos \varphi \sin \theta = \mathcal{B}q, \quad K \cos \theta = \mathcal{C}r;$$

e di qui si deducono subito le

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{C}r}{K}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathcal{A}p}{\mathcal{B}q},$$

le quali danno θ e φ in termini finiti di p, q, r , cioè di t .

Quanto a ψ , si parta dalle note formule (III, n. 28)

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \quad q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta,$$

dalle quali per eliminazione di $\dot{\theta}$ si trae

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Poichè dalle (4') e dalle espressioni di p e q testè richiamate discende

$$p \sin \theta + q \cos \theta = \frac{\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2}{K \sin \theta}, \quad K^2 \sin^2 \theta = \mathcal{A}^2 p^2 + \mathcal{B}^2 q^2,$$

si conclude

$$\dot{\psi} = K \frac{\mathcal{A}p^2 + \mathcal{B}q^2}{\mathcal{A}^2 p^2 + \mathcal{B}^2 q^2},$$

e basta una quadratura per calcolare ψ in funzione del tempo.

D'altra parte MAC CULLAGH⁽¹⁾, trasformando la rappresentazione del POINSON per polarità rispetto alla sfera di centro O e raggio 1 (la quale scorre su se stessa in ogni rotazione intorno ad O), ha fatto rilevare che durante il moto alla POINSON il cosiddetto *ellissoide di girazione o reciproco d'inerzia*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

si muove in modo da passare costantemente per un punto situato sulla linea di azione di K (e quindi pel punto diametralmente opposto).

Infine il GEBBIA⁽²⁾, generalizzando un risultato del SIACCI⁽³⁾, ha osservato che nel moto alla POINSON ogni quadrica di centro O , omociclica all'ellissoide di inerzia, rotola senza strisciare su di una quadrica fissa rotonda (intorno alla linea di azione di K); od anche (trasformando il teorema precedente per polarità rispetto alla sfera di centro O e raggio 1) ogni quadrica omofocale all'ellissoide di inerzia rotola senza strisciare su di una quadrica rotonda (intorno al diametro polare della linea d'azione di K).

14. ROTAZIONI PERMANENTI. — Vediamo se fra gli infiniti moti alla POINSON, di cui è suscettibile un solido fissato in un punto O , vi siano delle rotazioni uniformi. Ciò equivale a cercare se sia possibile soddisfare alle equazioni di EULERO (5') del n. 10, o alla equivalente equazione vettoriale (15'), ponendo ω eguale ad un vettore costante entro il corpo (e quindi anche nello spazio; IV, n. 11). Ma in tal caso, in virtù della omografia di inerzia risulta parimente costante, non soltanto nello spazio ma anche nel corpo, il momento K , talchè dalla (15'), si trae

$$\omega \wedge K = 0,$$

cioè i due vettori ω e K risultano costantemente paralleli.

(1) *On the rotation of a solid body round a fixed point, being...*, The collected works, pagg. 329-346.

(2) *Su due proprietà della rotazione spontanea dei corpi*, Mem. della R. Acc. dei Lincei, vol. I (1885), pagg. 326-333.

(3) *Collect. math. in mem. D. Chelini*, Milano, Hoepli, 1881, pagg. 6-16.

Viceversa, tutte le volte che è soddisfatta questa condizione, risulta dalla (15') la invariabilità entro il corpo (oltre che nello spazio) del momento K e quindi, traverso l'omografia di inerzia, della velocità angolare ω , cosicchè abbiamo intanto che condizione necessaria e sufficiente perchè un moto alla POINSON si riduca ad una rotazione uniforme si è che i due vettori ω e K si mantengano paralleli.

Ma, come sappiamo (IV, n. 18), ciò accade sempre e solo quando ω (e quindi K) ha costantemente la direzione di un asse principale di inerzia; e poichè questa condizione caratteristica non pone limitazione alcuna nè all'intensità nè al verso della velocità angolare ω , concludiamo che, quando è nullo il momento risultante delle forze esterne, *il solido può rotare* (con velocità angolare arbitraria, sia nell'uno che nell'altro verso) *esclusivamente intorno a ciascuno dei suoi assi principali di inerzia rispetto al punto fisso*.

In ognuna di codeste rotazioni uniformi il polo resta fisso sia nello spazio che sull'ellissoide (in un vertice di questo), talchè la polodia e la erpolodia risultano entrambe ridotte a codesto punto.

Per il solido fissato in un suo punto O (e assoggettato a forze attive di momento risultante nullo rispetto ad O) diconsi *permanenti* tanto le rotazioni uniformi dianzi caratterizzate, quanto i rispettivi assi di rotazione (assi principali di inerzia rispetto ad O).

A giustificare codesta qualifica si osservi che per una scelta arbitraria dei valori iniziali delle caratteristiche p, q, r o, ciò che è lo stesso, della determinazione iniziale del vettore ω , accade in generale che nel conseguente moto alla POINSON, questi elementi variano col tempo, come è loro imposto dalla (15') o dalle (5') o, genericamente, dalla condizione di rotolamento dell'ellissoide sul piano τ . Ma quando la rotazione istantanea iniziale avviene (con intensità e verso quali si vogliono) intorno ad uno degli assi principali di inerzia, la legge del moto, espressa dalla (15') o dalle (5') o dal criterio del POINSON, è tale da costringerla a permanere inalterata anche negli istanti successivi. Si tratta insomma di altrettante *soluzioni statiche* (VI, n. 17) delle (5').

Gli assi permanenti di rotazione, che per un solido di strut-

tura generale (\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} diversi l'un dall'altro) sono soltanto tre, a due a due ortogonali, diventano infiniti quando l'ellissoide di inerzia relativo al punto fisso sia rotondo (p. es. per un solido a struttura giroscopica rispetto ad O), giacchè in tal caso sono assi principali di inerzia, oltre l'asse di simmetria dell'ellissoide, tutti i suoi diametri equatoriali.

Se, più particolarmente ancora, l'ellissoide si riduce ad una sfera, sono assi permanenti *tutte* le rette uscenti dal punto fisso; ed anzi, in tale ipotesi, *ogni* moto spontaneo del solido è una semplice rotazione uniforme, come risulta da quanto precede e, d'altro canto, si è già verificato al n. 10 in base alle equazioni differenziali del moto.

15. DIGRESSIONE SUI MOMENTI DI DEVIATIONE. — Indugiare un momento sulla circostanza testè rilevata che, se si fissa per O una retta α , che non sia un asse permanente di rotazione, e si imprime al solido una qualsiasi velocità angolare iniziale, l'asse istantaneo di rotazione, nel moto spontaneo, devia subito dopo dalla sua posizione iniziale α . Per cogliere in qualche modo la ragione di questo fatto, vediamo se sia possibile aggiungere (alle eventuali forze attive esterne, a momento risultante nullo rispetto ad O) una ulteriore sollecitazione che impedisca a codesto asse α di deviare e costringa il solido a rotare permanentemente intorno ad esso con la data velocità angolare iniziale.

A tale scopo, riferiamo il solido, anzichè agli assi principali di inerzia, ad una terna solidale $Oxyz$ generica, in cui l'asse delle x coincida con l'asse di rotazione α prefissato, con che varranno per le componenti del momento risultante K delle quantità di moto, in luogo delle (4), le espressioni più generali (IV, n. 16)

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p} = \mathcal{A}p - \mathcal{C}'q - \mathcal{B}'r,$$

$$K_y = \frac{\partial T}{\partial q} = -\mathcal{C}'p + \mathcal{B}q - \mathcal{A}'r,$$

$$K_z = \frac{\partial T}{\partial r} = -\mathcal{B}'p - \mathcal{A}'q + \mathcal{C}r,$$

dove \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} denotano i momenti di inerzia (non più principali) rispetto agli assi x, y, z ed \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' quei caratteri strutturali del solido (rispetto al medesimo riferimento) che abbiamo chiamato prodotti d'inerzia od anche *momenti di deviazione*.

Più particolarmente, per la rotazione uniforme intorno all'asse x , che noi qui vogliamo imporre al solido e che è caratterizzata dalle condizioni

$$p = p_0, \quad q = r = 0,$$

dove p_0 è la velocità angolare prefissata, dovremo porre

$$K_x = \mathcal{A}p_0, \quad K_y = -\mathcal{C}'p_0, \quad K_z = -\mathcal{B}'p_0.$$

D'altra parte, se denotiamo con M l'incognito momento addizionale, sussisterà la seconda equazione cardinale sotto la forma

$$\dot{K} + \omega \wedge K = M;$$

e basta proiettarla sugli assi solidali per ottenere le equazioni

$$M_x = 0, \quad M_y = \mathcal{B}'p_0^2, \quad M_z = -\mathcal{C}'p_0^2,$$

che determinano univocamente il momento addizionale voluto. Questo momento M va a zero sempre e solo quando si annullano insieme \mathcal{B}' e \mathcal{C}' , cioè (come si sapeva) quando l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia; e in tutti i casi sono i coefficienti \mathcal{B}' , \mathcal{C}' che lo individuano. Si può dire in forma espressiva che la necessità di ricorrere ad un momento addizionale per impedire che l'asse di rotazione devii dalla sua posizione iniziale Ox è dovuta alla presenza dei due coefficienti \mathcal{B}' , \mathcal{C}' . Poichè altrettanto può dirsi di \mathcal{C}' , \mathcal{A}' rispetto ad Oy e di \mathcal{A}' , \mathcal{B}' rispetto ad Oz , resta giustificato il nome di *momenti di deviazione* che abbiamo attribuito (X_1 , n. 22) ai caratteri strutturali \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' del solido.

16. CARATTERE PRECESSIONALE DEL MOTO ALLA POINSOT DI UN SOLIDO A STRUTTURA GIROSCOPICA RISPETTO AL PUNTO FISSO. — Nel caso di un solido che, rispetto al suo punto fisso O , abbia struttura giroscopica, è facile caratterizzare l'aspetto cinematico del moto in modo più preciso e com-

pleto di quello fornito, pel caso generale, dal criterio puramente geometrico del POINSON.

Riprendiamo, infatti, la prima delle equazioni di EULERO in forma giroscopica (n. 9), la quale, annullandosi qui, per ipotesi, il momento risultante M delle forze attive esterne rispetto ad O (e quindi anche la sua componente assiale M_z), assume la forma

$$C\dot{r} = 0;$$

e perciò esprime il fatto che, durante tutto il moto, la componente r della velocità angolare secondo l'asse giroscopico si mantiene costante.

Si ricordi allora l'espressione generale trovata al n. 17 del Cap. IV per la velocità angolare di un corpo a struttura giroscopica

$$(20) \quad \omega = \frac{1}{A} K + \frac{A - C}{A} r k,$$

dove k denota il versore dell'asse giroscopico.

Poichè questo versore k è per definizione invariabile nel corpo e, d'altra parte, nel caso presente r è costante e, trattandosi di un moto alla POINSON, il momento K è fisso nello spazio, si riconosce dalla precedente espressione di ω che essa è, in questo caso, somma di due vettori di lunghezza costante, di cui il primo, diretto come K , è fisso nello spazio, il secondo, diretto come k , è invariabile nel corpo; e ciò basta perchè si possa concludere (Cap. IV, n. 15) che: *Ogni moto alla POINSON di un solido a struttura giroscopica rispetto al punto fisso O è una precessione regolare, avente per asse di precessione la parallela per O al momento K delle quantità di moto e per asse di figura l'asse giroscopico del solido.*

Se, denotando con z il versore (fisso nello spazio e nel corpo) del momento K , introduciamo gli elementi caratteristici della generica precessione regolare, cioè la velocità angolare $\omega_1 = \mu k$, che possiamo dire *propria* del solido o *giroscopica*, la velocità angolare $\omega_2 = vz$ di *precessione* e l'angolo $\theta = \widehat{zk}$, possiamo riconoscere se si tratti di una precessione progressiva o retrograda, verificando, secondo il criterio in-

trinseco del n. 17 del Cap. IV, se risulti positivo o negativo il prodotto scalare

$$\omega_1 \times \omega_2 = \mu v \cos \theta.$$

Ora dal confronto della

$$(20') \quad \omega = vz + \mu k$$

colla (20) si ha anzitutto

$$\mu = \frac{A - C}{A} r,$$

mentre d'altra parte, moltiplicando scalarmente ambo i membri della (20') per k , si deduce

$$\omega \times k = r = v \cos \theta + \mu.$$

Così, eliminando r fra le due ultime equazioni, si riconosce intanto che gli elementi caratteristici di ogni singola precessione regolare spontanea del solido a struttura giroscopica rispetto al punto fisso sono legati dalla relazione

$$(21) \quad (A - C) v \cos \theta - C\mu = 0.$$

E di qui si trae

$$\mu v \cos \theta = \omega_1 \times \omega_2 = \frac{C\mu^2}{A - C},$$

cosicchè si riconosce che il carattere progressivo o retrogrado delle precessioni regolari spontanee dipende esclusivamente dalla struttura del solido: esse sono tutte progressive se l'ellissoide rotondo d'inerzia (relativo al punto fisso) è allungato ($A > C$), tutte retrograde se codesto ellissoide è schiacciato ($A < C$).

Notiamo infine che, naturalmente, come precessioni degeneri si ritrovano le rotazioni uniformi intorno agli (infiniti) assi principali di inerzia.

17. MOTO RELATIVO AL BARICENTRO. — Poichè la seconda equazione cardinale assume la forma

$$(2) \quad \frac{dK}{dt} = M$$